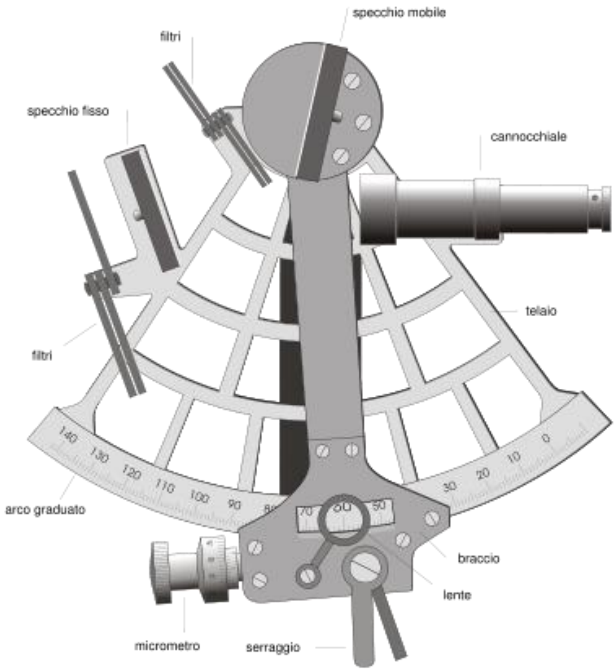
3. – L' impiego delle osservazioni degli astri in navigazione astronomica

3.1 – Il sestante.

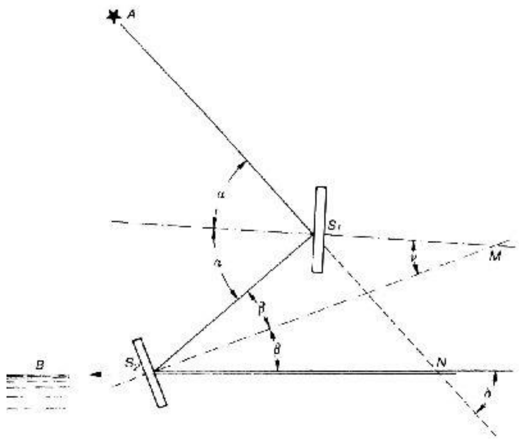
Lo strumento adoperato per misurare l'altezza degli astri è il sestante.

Il sestante sfrutta il principio ottico del sestante o della doppia riflessione:

se un raggio luminoso subisce una doppia riflessione sullo stesso piano, l'angolo formato tra la direzione di provenienza del raggio luminoso e l'ultima direzione riflessa è pari al doppio dell'angolo acuto formato dalle normali delle superfici riflettenti.



La scala del sestante è quindi di 60° reali ma è graduata in maniera doppia in modo da leggere direttamente il doppio dell'angolo formato dai due specchi, cioè l'altezza dell'astro.



Con l'aiuto della figura vediamo di dimostrare la validità del principio ottico del sestante. Consideriamo il triangolo NS_1S_2 evidentemente è verificato che:

$$h + 2\beta + (180° - 2\alpha) = 180°$$

da cui :

$$h = 180° - 180° + 2\alpha - 2\beta$$

e infine:

$$h = 2\alpha - 2\beta \qquad [1]$$

Considerando adesso il triangolo M S_1S_2 si avrà:

$$\nu + \beta + (180° - \alpha) = 180°$$

e ancora:

$$\nu = 180° - 180° + \alpha - \beta$$

e infine: $\nu = \alpha - \beta \quad [2]$.

Moltiplicando per 2 ambo i membri della relazione [2] e poi sottraendola membro a membro dalla [1] si avrà :

$$\begin{array}{r} h = 2\alpha - 2\beta \; - \\ \underline{2\nu = 2\alpha - 2\beta} \\ h - 2\nu = 0 \end{array}$$

da cui: $h = 2\nu$

che dimostra la validità del principio enunciato.

L'osservazione con un sestante consiste nel far *collimare* due punti di vista: uno, attraverso lo specchio mobile, è un oggetto posto nella volta celeste, l'altro, attraverso lo specchio fisso, è l'orizzonte. Attraverso una opportuna regolazione si porta l'immagine della parte bassa dell'oggetto celeste a toccare l'orizzonte. Condizione fondamentale è la perpendicolarità degli specchi rispetto al piano del telaio. Per verificare tale condizione con l'alidada a metà della scala graduata si porta il sestante all'altezza dell'occhio e si osserva allo specchio grande solidale all'alidada l'altro estremo della gradazione; se appare in continuità allora la perpendicolarità degli specchi è garantita, altrimenti è necessario agire sulle viti di regolazione poste dietro gli specchi stessi per ripristinare la condizione richiesta.

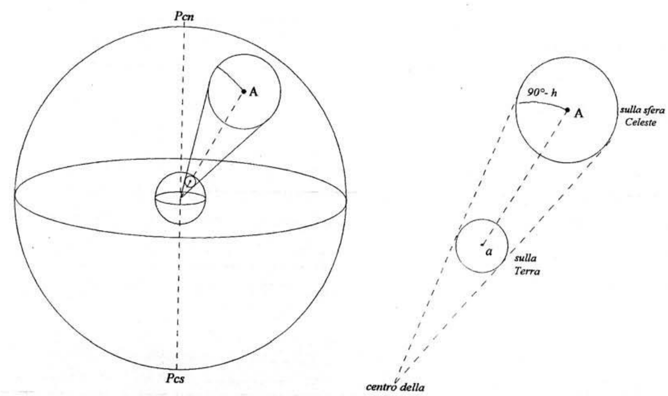
In considerazione del fatto che l'osservazione degli astri si effettua dalla superficie terrestre, è necessario ***correggere*** la misura dell'altezza osservata h_o utilizzando delle **correzioni complessive** chiamate C_1, C_2, C_3 contenute nelle Effemeridi Nautiche che sono meno precise ma sufficienti per gli scopi dell'uomo di mare. Tali tavole forniscono delle correzioni tutte sommative:

- la ***prima***, ottenuta in funzione dell'*elevazione dell'occhio* dell'osservatore sul livello del mare serve a limitare l'effetto della *depressione dell'orizzonte*;
- la ***seconda***, che si ottiene in base all'*altezza osservata*, serve a limitare gli effetti della *rifrazione*.
- la ***terza*** è ottenuta tenendo conto del *semidiametro* dell'astro osservato e si applica solo al Sole, alla Luna ed ai pianeti Marte e Venere.

Questa e tutte le altre tavole di correzione proposte dalle Effemeridi Nautiche sono calcolate per condizioni atmosferiche standard, riferite cioè ad una temperatura atmosferica di 15° C, una pressione di 1013 hPa e con scarsa umidità.

3.2 - La Circonferenza d'altezza.

Nella sfera celeste locale relativa ad un osservatore di latitudine φ consideriamo un astro A di declinazione δ e altezza h. Consideriamo adesso la verticale passante per l'astro A, essa intersecherà la superficie terrestre nel punto S che prende il nome di ***punto subastrale S*** ed altro non è che l'immagine dell'astro A proiettata sulla superficie terrestre.



Se S è un punto della superficie terrestre allora ammetterà una latitudine φ_s ed una longitudine λ_s.

Per la latitudine φ_s si deduce abbastanza agevolmente dalla figura seguente che essa è uguale alla declinazione δ dell'astro ovvero:

$$\varphi_s = \delta$$

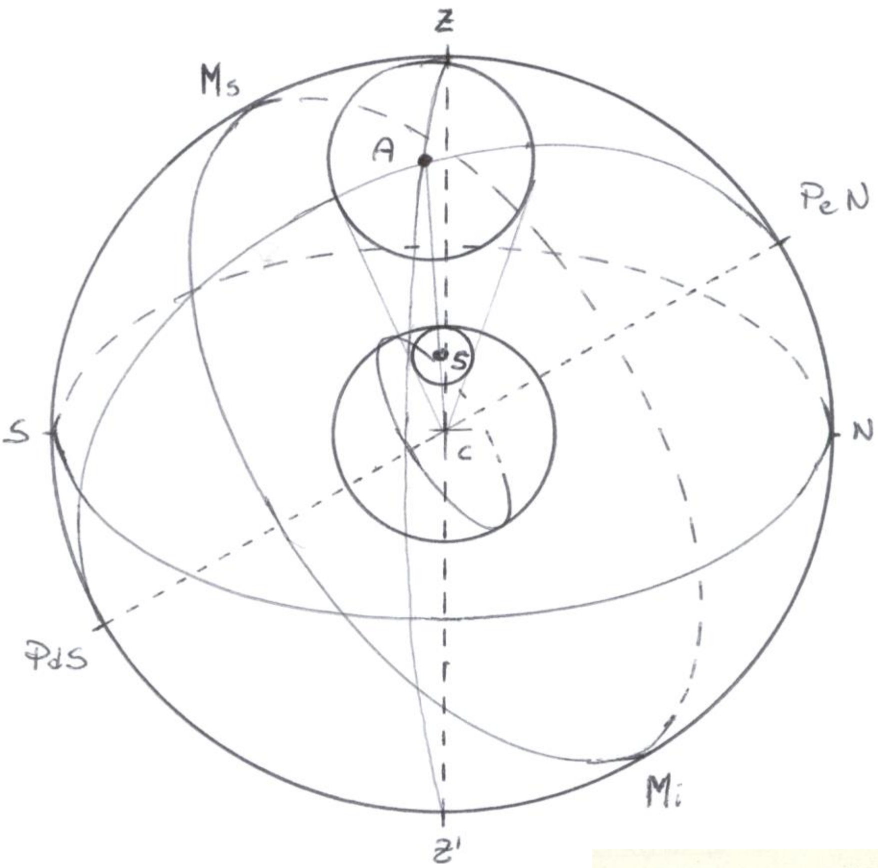
Per determinare il valore di λ_s osserviamo invece che l'orario passante per l'astro A forma con il meridiano dell'osservatore l'angolo al polo $\hat{P}$. Ebbene mutuando il ragionamento se ci riferiamo al meridiano di Greenwich l'orario passante per l'astro A forma evidentemente l'angolo $\hat{P}_G$ (*angolo al polo rispetto a Greenwich*), la differenza tra il meridiano di Greenwich ed il meridiano dell'osservatore è palesemente uguale alla longitudine dell'osservatore λ, da cui discende che la longitudine λ_s del punto subastrale S debba essere uguale a $\hat{P}_G$ ovvero:

$$\lambda_s = \hat{P}_G$$

Adesso immaginiamo di tracciare sulla sfera celeste una circonferenza con centro nell'astro A e di raggio pari alla *distanza zenitale* $z = 90° - h$. Proiettando dal centro della terra sulla superficie terrestre si otterrà una circonferenza omologa con centro in S e passante per la posizione dell'osservatore.

Il luogo di posizione ottenuto prende il nome di circonferenza d'altezza e viene definito come *il luogo geometrico dei punti della terra nei quali, nello stesso istante, l'altezza di un astro ha il medesimo valore: ha per polo il punto subastrale e per raggio sferico la distanza zenitale*.

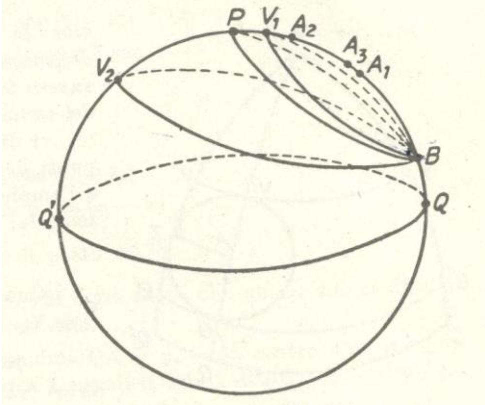
Si ottiene quindi un luogo di posizione (LOP) di grande interesse in quanto tracciabile utilizzando l'altezza h di un astro misurabile direttamente e la relativa distanza zenitale calcolabile facilmente algebricamente con la relazione $z = 90° - h$.



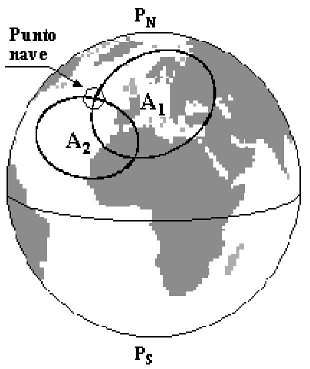
La circonferenza d'h può essere di tre specie asseconda della posizione del Polo dell'astro rispetto ad essa.

La circonferenza d'h si dice di ***prima specie*** se il polo dell'astro è ***esterno*** al cerchio; si dice di ***seconda specie*** quando il polo dell'astro è ***interno*** al cerchio; si dice di ***terza specie*** quando il polo dell'astro è un punto del cerchio d'altezza.

Ciò è mostrato schematicamente in figura.



Volendo ottenere un punto nave bisognerà utilizzare almeno due LOP, ma per tracciarli in maniera utile ai fini del posizionamento con una definizione di almeno un primo d'arco bisognerebbe disporre di un globo rappresentativo dal diametro di almeno 7 metri, decisamente troppo ingombrante da posizionare a bordo di una nave.



Si può pensare di tracciare i LOP sulla carta nautica ma ciò non è realizzabile poiché la circonferenza d'altezza è difficilmente rappresentabile sulla carta di Mercatore.

Le tre diverse specie introducono infatti notevoli difficoltà di rappresentazione in considerazione delle deformazioni che la tipologia di carta comporta.

Per ovviare a questo inconveniente si usa considerare solo la parte di circonferenza d'h che ricade nell'intorno del punto stimato P_s detto ***cerchio di certezza*** (o di *incertezza*) avente per centro la posizione stimata della nave P_s e per raggio la stima dell'errore probabile ε.

3.2.1 - La retta d'altezza (metodo Saint Hilare)

Quanto fin qui detto evidenzia il problema del tracciamento del cerchio d'altezza sulla carta nautica, essendovi vari fattori di cui bisogna tener conto per rappresentare fedelmente tale curva sulla proiezione di Mercatore.

Atteso quindi che la circonferenza d'h non può adoperarsi agevolmente, si considera ai fini dell'ottenimento del FIX astronomico, la parte di circonferenza ricadente all'interno della zona di certezza del punto stimato P_s dell'osservatore.

Il punto della circonferenza d'h più vicino al punto P_s, prende il nome di ***punto determinativo D***. La direzione nella quale si osserva l'astro ovvero l'azimut *a*, è verosimilmente la direzione sulla quale si trova D ovvero la congiungente P_s con il punto subastrale S.

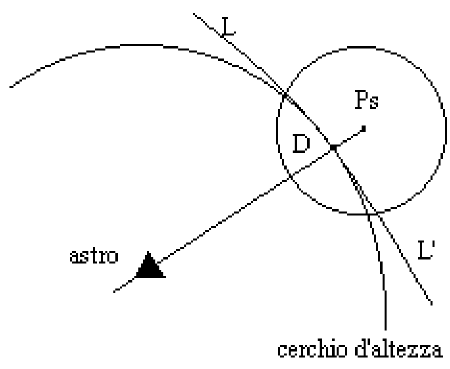
La distanza alla quale si trova D corrisponde alla differenza Δh tra l'altezza vera h_v, ottenuta dalla correzione dell' altezza osservata, e l' altezza stimata h_s, ottenuta in funzione di φ_s (*latitudine stimata*), δ e $\hat{P}$ (calcolato per il meridiano stimato λ_s).

In teoria se non vi fossero errori di stima su P_s e non vi fossero gli errori tipici della misura dell'altezza degli astri D e P_s dovrebbero coincidere e $\Delta h = h_v - h_s$ dovrebbe essere nulla.

In pratica ciò non avviene quasi mai e, usualmente, si accettano valori di Δh (positivi o negativi) compresi tra 0' e 6', oltre questo limite è consigliabile <u>non utilizzare</u> il LOP quindi ripetere l'osservazione e controllare i calcoli.

Consideriamo adesso un arco di lossodromia LL' tangente alla circonferenza d'altezza nel punto determinativo D: si ottiene una linea rettificabile sulla carta in proiezione di Mercatore.

La ***retta d'h*** è dunque un luogo di posizione ottenuto considerando un arco di lossodromia tangente nel punto determinativo D al posto della circonferenza d'altezza.



Per procedere al tracciamento della retta d'h bisogna eseguire in sequenza le seguenti operazioni:

$\boxed{1}$ Si osserva con il sestante un corpo celeste (Sole, Luna, stella …) e se ne misura l'angolo d'altezza h avendo cura di fissare l'istante di osservazione **T**

$\boxed{2}$ Si corregge l'altezza strumentale ottenuta h_i utilizzando le tavole allegate alle **Effemeridi Nautiche**

h_i =	
$+\gamma$ =	
h_o =	
$+C_1$ =	
$+C_2$ =	
$+C_3$ =	Questa correzione è necessaria solo per il Sole, la Luna, la Polare ed i pianeti Marte e Venere
$-\ 1°$	
h_v =	

$\boxed{3}$ In base all'istante di osservazione **T** si determinano sulle Effemeridi Nautiche le coordinate locali orarie **t** e δ

	Sole	***Pianeta***	***Luna***	***Stella***
Per U.T. = HH^h	T_v =	$T_\bullet$=	$T_☾$ =	T_s =
per i_m = MM^m	i_v =	$i_\bullet$ =	$i_☾$ =	i_s =
	T_v =	$T_\bullet$ =	$T_☾$ =	T_s =
	$+\lambda$=	$+\lambda$=	$+\lambda$ =	$+360°-\alpha$ =
	t_v =	$t_\bullet$ =	$t_☾$ =	T_* =
				$+\lambda$ =
				t_* =

Per ottenere l'angolo al polo $\hat{P}$ valgono le solite regole :

se $\mathbf{t} < 180°$ allora $\hat{P}_W \equiv \mathbf{t}$ se $\mathbf{t} > 180°$ allora $\hat{P}_E = 360° - \mathbf{t}$

$\boxed{4}$ Determinati $\hat{P}$ e δ si calcola h_s con la formula:

$$\sin h_s = \sin \varphi_s \cdot \sin \delta + \cos \varphi_s \cdot \cos \delta \cdot \cos \hat{P}$$

$\boxed{5}$ Con la Tavola 18 (*Tavola ABC*) della raccolta di Tavole Nautiche si calcola l'***azimut*** α

$\boxed{6}$ Si determina il $\Delta h = h_v - h_s$

$\boxed{7}$ Si posiziona il punto stimato P_s sulla carta nautica e, in direzione dell'azimut dell'astro, si riporta il Δh verso l'astro per valori positivi, in direzione opposta se Δh ha valore negativo; si individua così il *punto determinativo* **D**. Da questo punto ortogonalmente all'azimut si traccia la retta d'altezza.

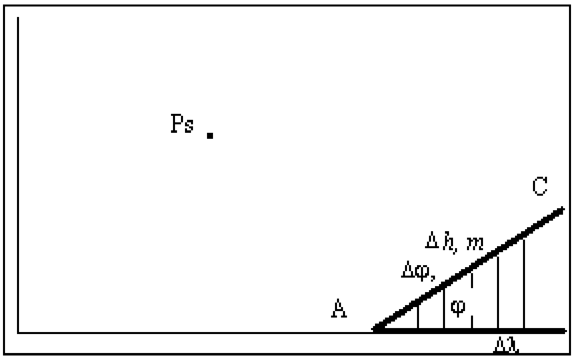
3.3 - Costruzione della carta approssimata di Mercatore.

Per determinare il FIX astronomico non sempre è possibile utilizzare una carta nautica ufficiale, anche perché solitamente le osservazioni astronomiche sono prerogativa delle traversate oceaniche e quindi non ha senso costruire e stampare carte della superficie dell'oceano.

Allo scopo si può costruire una carta approssimata con la quale compiere, con sufficiente precisione, le varie operazioni grafiche finalizzate all'ottenimento del FIX.

Si prende un foglio di carta millimetrata o quadrettata e, in un angolo, si traccia una semiretta sulla quale si riporta, secondo la prescelta ***scala delle longitudini*** che si intende utilizzare (*p.e.* 1 cm = 1 nm; 2 cm = 1 nm; ecc…).

Dall'origine di questa semiretta se ne traccia un'altra AC inclinata rispetto alla prima di un angolo pari a φ_s latitudine stimata.



Da ogni divisione della scala delle longitudini si fanno uscire le perpendicolari alla scala che incontreranno la retta AC in altrettanti punti determinando così la ***scala delle latitudini*** dove si leggeranno i Δh, i $\Delta\varphi$ e le distanze m_i tra i punti.

A questo punto si fisseranno un parallelo di riferimento ed un meridiano dal quale si prenderanno le misure per posizionare il punto stimato P_s da dove si tracceranno le semirette indicanti gli azimut degli astri osservati e si procederà al tracciamento delle rette d'h.

3.4 - Il trasporto delle rette d'altezza.

Le osservazioni di più astri risultano sempre intervallate di qualche minuto l'una dall'altra. Solitamente si usa determinare il FIX per l'istante dell'ultima osservazione.

Si pone dunque il problema di rendere **<u>simultanee</u>** le rette mediante l'operazione del *trasporto*, operazione che si basa sul concetto che il LOP si sposta con l'osservatore.

Allo scopo si adopera la seguente procedura:

1. Si determinano gli intervalli di tempo Δt relativi alle varie osservazioni rispetto all'ultima

2. Con i Δt determinati ed in base alla velocità della nave si calcolano i vari cammini m_i (m_1, m_2, m_3..) relativi al numero ***i*** di astri osservati. Allo scopo è possibile adoperare le apposite tavole contenute nelle Effemeridi Nautiche o sulla raccolta di Tavole Nautiche.

3. Partendo dal punto stimato P_s su ogni azimut si segnano i punti $\mathbf{D}_i$ e li si sposta di una distanza m_i nella direzione della rotta vera R_v seguita dalla nave ottenendo così i nuovi punti determinativi $\mathbf{D}_i$'. Da ciascuno di questi nuovi punti si tracceranno le rette d'h trasportate e rese simultanee a quella relativa all'ultima osservazione.

4. – La *Bisettrice d'altezza*.

Le rette d'altezza, come tutti i LOP ottenuti effettuando delle misure, sono affette da errori la cui entità è incognita. Gli errori si differenziano in base alle cause da cui dipendono: le *cause accidentali* che incidono con entità variabile *e* sia in senso accrescitivo che in senso diminutivo e le *cause sistematiche* che agiscono nello stesso senso *e* con entità costante.

La media delle varie misure riduce gli errori accidentali in quanto essi sono distribuiti a destra ed a sinistra della media stessa. L'attendibilità della media aumenta all'aumentare del numero di osservazioni e quindi del numero delle misure effettuate.

Nel caso di due rette d'altezza simultanee o quasi si può ragionevolmente ritenere che a prevalere siano gli errori sistematici e al posto delle due rette può considerarsi la *bisettrice d'altezza*, che è la bisettrice dell'angolo $\Delta\alpha$ differenza d'azimut tra i due astri:

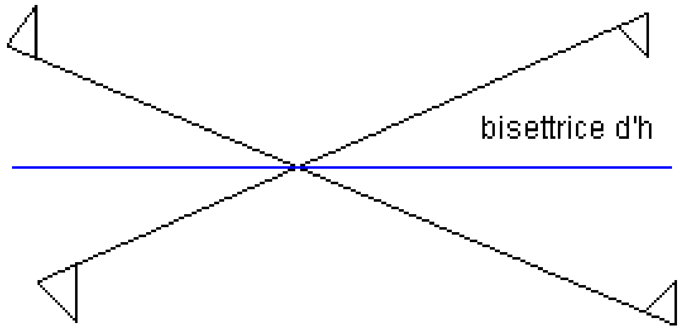
$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

Per il tracciamento della bisettrice bisogna tener conto dell'orientamento delle frecce delle rette che dovranno risultare convergenti (cioè che si *guardano*) o divergenti (cioè che si *sguardano*).

Il valore dell'errore della bisettrice d'altezza è fornito dalla relazione:

$$e_b = \pm \frac{|e_1 - e_2|}{2 sin \frac{\Delta\alpha}{2}}$$

Dalla quale si evince che l'incidenza minima dell'errore e_b è dato da un valore della differenza d'azimut $\Delta\alpha$ pari a 180°.



Questo significa che due rette d'altezza simultanee danno origine ad una buona linea di posizione, che è praticamente priva della componente sistematica dell'errore. È per questa ragione che si preferisce ottenere un punto nave astronomico dall'incrocio di due bisettrici d'h ottenute effettuando le misure quasi simultanee di quattro astri.

Per verificare l'attendibilità di tale punto è possibile calcolare un valore indicativo dell'errore sistematico ed accidentale del punto nave ottenuto. Per ciascuna coppia di rette si misura la minima distanza *d* tra il FIX ottenuto e la retta; il valore della distanza *d* si considera **positivo** se le frecce delle rette sono divergenti, **negativo** in caso contrario.

Quindi indicando con d_1 e con d_2 le distanze ottenute per ciascuna coppia di rette, il valore dell'errore sistematico medio risulterà fornito dalla relazione:

$$e_s = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Il valore della componente accidentale è invece fornito dalla relazione:

$$e_a = |d_1 - d_2|$$

Le precedenti relazioni sono normalmente usate per valutare l'affidabilità del punto nave se lo stesso è frutto dell'intersezione di due bisettrici.

Se dal grafico risulta invece la possibilità di tracciare più bisettrici è prassi considerare come più affidabile l'intersezione tra le bisettrici che danno origine al minor valore dell'errore accidentale e_a.

5. – Calcolo dell'istante del passaggio di un astro al meridiano.

Per conoscere l'istante del passaggio di un astro al meridiano superiore è sufficiente ricordare che in quell'stante l'angolo orario locale t è nullo: $t = 0°$.

Partendo da questo assunto è semplice comprendere che sommando algebricamente la longitudine dell'osservatore λ si ottiene l'angolo orario rispetto a Greenwich T da cui è poi possibile, tramite le Effemeridi Nautiche, passare all'ora media di Greenwich T_m e da questa, sommando la longitudine dell'osservatore espressa in ore λ^h, ottenere l'ora media locale t_m.

Il seguente schema di calcolo riporta quanto sopra descritto per i vari corpi celesti:

Sole		**Pianeta**	**Luna**	**Stella**	
t_v =		$t_{\bullet}$ =	$t_{\leftmoon}$ =	t_{*} =	
$-\lambda$ =		$-\lambda$ =	$-\lambda$ =	$-\lambda$ =	
T_v =	UT = HH^h	$T_{\bullet}$ =	$T_{\leftmoon}$ =	T_{*} =	
	$i_m = MM^m SS^s$			$-360° - \alpha$ =	
	UT = $HH^h MM^m SS^s$			T_s =	UT = HH^h
	$+\lambda^h = HH^h MM^m SS^s$				$i_m = MM^m SS^s$
	$t_m = HH^h MM^m SS^s$				UT = $HH^h MM^m SS^s$
					$+\lambda^h = HH^h MM^m SS^s$
					$t_m = HH^h MM^m SS^s$

In ogni caso è bene ricordare che sulle Effemeridi Nautiche vengono indicati gli istanti del passaggio al meridiano superiore per il Sole, la Luna ed i pianeti. Si tratta però dell'ora riferita al ***meridiano centrale del fuso*** per cui è sempre necessario riportare la correzione del fuso C_f che tiene conto della distanza in longitudine tra il meridiano dell'osservatore e quello centrale del fuso, con segno positivo + se Est e segno positivo – se Ovest.

Per l'stante del passaggio al meridiano inferiore, invece, è sufficiente porre l'angolo orario locale t pari a 180° e poi procedere ai calcoli sempre come indicato per il passaggio al meridiano superiore.

6. – Passaggio al meridiano mobile della nave.

Si tratta di un punto nave ottenuto con due rette di sole intervallate. La prima si osserva almeno un'ora e mezza prima della stima del passaggio del sole al meridiano.
Per calcolare la stima (o meglio l'intervallo "*i*") che separa dal passaggio in meridiano si usa la relazione

$$i = \frac{\hat{P}}{900' + v \cdot \sin R_v \cdot \sec\varphi_s}$$

dove:

- ***i*** è l'intervallo di tempo (Δt) dall'istante dell'osservazione antimeridiana all'istante del passaggio al meridiano mobile;
- $\hat{P}$ è l'angolo al Polo del sole all'antimeridiana espresso in primi d'arco
- V = velocità della nave
- R_v = rotta vera
- φ_s = latitudine stimata (relativa alla 1ª osservazione antimeridiana)

Ottenuto "***i***" lo si trasforma in ore e frazioni di ora. In pratica l'intervallo di tempo "***i***" sommato all'istante dell'osservazione antimeridiana T_{m1} fissa l'istante di T_{mps} in cui il sole culminerà al meridiano mobile della nave. Si calcola il cammino $\boldsymbol{m} = v \cdot i$ e si calcola quindi $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$ con le formule della lossodromia e si ottiene la posizione nella quale la nave dovrebbe trovarsi al momento della culminazione meridiana del Sole.
Trattandosi di astro in meridiano si usano le ovvie relazioni:

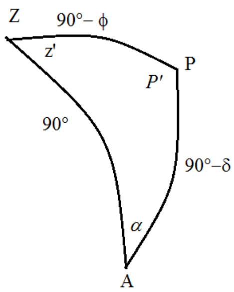
- $h = 90° - |\varphi - \delta|$
- per l'azimut *a* sarà: $a = 180°$ se $\delta_{SUD\ o\ NORD} < \varphi_{NORD}$; sarà $a = 0°$ se $\delta_{NORD} > \varphi_{NORD}$

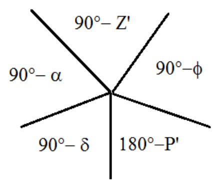
7. – Calcolo dell'istante del sorgere di un astro.

Volendo conoscere l'istante del sorgere di una stella bisogna ricordare che questo coincide con il passaggio dall'emisfero *invisibile* a quello *visibile* per cui, nel momento in cui l'astro taglia l'orizzonte ha altezza nulla ($h = 0°$) e, pertanto, la distanza zenitale *z* vale 90°. Il triangolo di posizione è quindi rettilatero e può risolversi mediante la regola di Nepero. Quindi se nel triangolo sferico non si considera il lato di 90° ed al posto degli angoli ad esso adiacente si considerano i loro complementi ed all'angolo opposto al lato di 90° il suo supplemento allora:

il coseno di un elemento è uguale :

- al prodotto dei **seni** degli elementi *lontani*
- al prodotto delle **cotangenti** degli elementi *vicini*





pertanto applicando tale regola al triangolo di figura per ricavare l'angolo al Polo $\hat{P}$ si otterrà:

$$\cos(180° - \hat{P}) = \text{cotg}(90° - \delta) \cdot \text{cotg}(90° - \varphi)$$

e siccome:

$$\cos(180° - \hat{P}) = -\cos\hat{P} \quad \text{e} \quad \text{cotg}(90° - \alpha) = \text{tg}\,\alpha \qquad \text{si avrà:} \qquad \cos\hat{P} = -\,\text{tg}\varphi \cdot \text{tg}\delta$$

Evidentemente per determinare l'ora del sorgere è necessario conoscere la declinazione dell'astro δ, cosa che di solito è possibile solo per le stelle per le quali la variazione diurna della stessa è assai contenuta; discorso diverso vale per il Sole, la Luna ed i pianeti la cui variazione diurna della declinazione è rilevante. Per questi corpi celesti l'ora del sorgere viene fornita dalle Effemeridi Nautiche, sebbene sia comunque necessario operare la correzione per la longitudine C_f già descritta nel paragrafo precedente poiché l'ora del sorgere indicata è riferita al meridiano centrale del fuso. Una volta determinato il valore dell'angolo al Polo $\hat{P}$ si risale al corrispondente angolo orario locale t_* mediante la relazione $t_* = 360° - \hat{P}$. Una volta ottenuto t_* si può risalire all'istante del sorgere t_m utilizzando il seguente schema di calcolo:

$$\begin{array}{rl}
t_* = & \\
-\lambda = & \\
\hline
T_* = & \\
-360° - \alpha = & \\
\hline
T_s = & \quad UT = HH^h \\
 & \quad i_m = MM^m SS^s \\
 & \quad \overline{UT = HH^h\, MM^m SS^s} \\
 & \quad +\lambda^h = HH^h\, MM^m SS^s \\
 & \quad \overline{t_m = HH^h\, MM^m SS^s}
\end{array}$$

8. – Determinazione della latitudine mediante l'altezza della polare .

È noto dalla sfera celeste che la posizione della stella polare indica grossomodo la posizione del Polo elevato nord, l'altezza di quest'ultimo punto sull'orizzonte rappresenta la latitudine φ dell'osservatore. Può quindi tornare utile determinare il valore della latitudine φ mediante l'osservazione dell'altezza della stella polare. A questo scopo esistono delle tavole apposite nelle Effemeridi Nautiche denominate ***Latitudine con osservazione di polare*** la cui validità è limitata all'anno di riferimento delle effemeridi stesse.

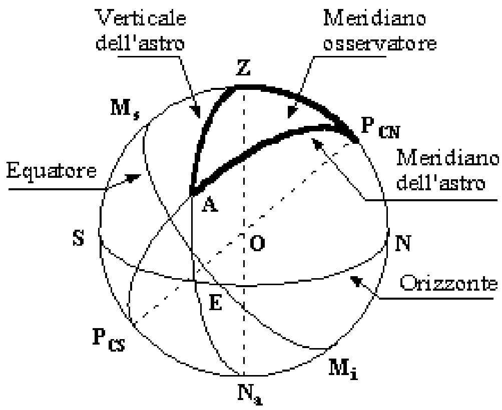
Il loro impiego è abbastanza semplice: l'argomento di entrata è il tempo sidereo locale t_s determinato in base all'istante di osservazione t_m, in base ad esso si determinano le tre correzioni C_1, C_2 e C_3 che sono tutte sommative e vanno sommate all'altezza vera h_v secondo la relazione:

$$\varphi = h_v + C_1 + C_2 + C_3 - 1°$$

Gli argomenti di entrata per le tre correzioni sono il t_s per la prima, il t_s e l'altezza vera h_v per la seconda, il t_s ed il mese dell'osservazione per la terza. L'altezza vera h_v si ottiene correggendo l'altezza strumentale h_i applicando la ben nota reazione:

$$h_o = h_i + \gamma \qquad \text{e quindi} \qquad h_v = h_o + C_1 + C_2 - 1°$$

9. - Richiami di trigonometria sferica.



Vengono qui richiamati alcuni teoremi di trigonometria sferica utili per la risoluzione dei triangoli sferici studiati in navigazione astronomica.

<u>Il teorema di Eulero</u>

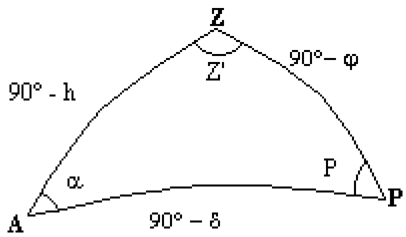
Si usa in astronomia per la trasformazione delle coordinate da ***locali orarie*** a ***locali altazimutali*** e viceversa. Il suo enunciato recita:

"*in un triangolo sferico qualsiasi il coseno di un lato è dato dal prodotto del coseno degli altri due lati più il prodotto del seno degli stessi lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso ed opposto al lato da calcolare*"

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

analogamente possono essere determinate le altre due relazioni:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$



Triangolo Nautico o Astronomico

Se pensiamo adesso di applicarlo al *triangolo astronomico* otterremo:

$$\cos (90°- h_s) = \cos (90°- \varphi_s)\ \cos (90°- \delta)\ + \sin (90°- \varphi_s)\ \sin (90°- \delta)\ \cos \hat{P}$$

che ricordando le regole relative agli angoli complementari ($\alpha + \beta = 90°$) diventa:

$$\sin h_s = \sin \varphi_s \cdot \sin \delta + \cos \varphi_s \cdot \cos \delta \cdot \cos \hat{P}$$

espressione nota con il nome di formula bruta che permette di calcolare l'altezza stimata di un astro h_s in funzione della latitudine stimata φ_s , della declinazione δ e dell'angolo al polo $\hat{P}$.

La formula di Eulero è di tipo *semilogaritmico*, ovvero composta da due parti cui possono essere applicate separatamente le regole dei logaritmi. Per la sua risoluzione è consigliato lo schema seguente:

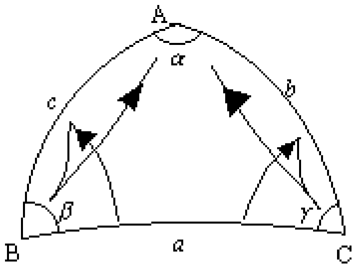
φ_s =	sin =	cos =
δ =	sin =	cos =
$\hat{P}$ =	M =	cos =
	+N =	N =
	sin h_s=	h_s =

Il teorema del Vieta o delle cotangenti

Anche questo teorema risulta utile nella trasformazione delle coordinate. Esso lega ***quattro*** elementi consecutivi del triangolo *due lati* e *due angoli*. Per scrivere la sua formulazione si ricorre alla regola mnemonica che consente di scrivere in successione le sei funzioni trigonometriche che ne fanno parte:

cotg sin cos cos sin cotg

si noti come la successione delle ultime tre è l'inversa delle prime tre.



Aiutandoci con la figura pensiamo di ricavare l'angolo α, dovremo scrivere:

$$\text{cotg}\, a \sin b = \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \,\text{cotg}\, \alpha$$

oppure :

$$\text{cotg}\, a \sin c = \cos c \cos \beta + \sin \beta \,\text{cotg}\, \alpha$$

Analogamente potranno ricavarsi le altre relazioni:

$$\text{cotg}\, b \sin a = \cos a \cos \gamma + \sin \gamma \,\text{cotg}\, \beta$$
$$\text{cotg}\, b \sin c = \cos c \cos \alpha + \sin \alpha \,\text{cotg}\, \beta$$
$$\text{cotg}\, c \sin b = \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \,\text{cotg}\, \gamma$$
$$\text{cotg}\, c \sin a = \cos a \cos \beta + \sin \beta \,\text{cotg}\, \gamma$$

Il teorema delle cotangenti si applica al triangolo astronomico per ricavare l'angolo zenitale ***Z'*** in funzione della latitudine stimata φ_s , della declinazione δ e dell'angolo al polo $\hat{P}$, ottenendo :

$$\text{cotg}\,(90°-\delta) \sin (90°-\varphi_s) = \cos (90°-\varphi_s) \cos \hat{P} + \sin \hat{P} \,\text{cotg}\, \boldsymbol{Z}'$$

e ancora ricordando le regole relative agli angoli complementari :

$$\text{tg}\, \delta \cos \varphi_s = \sin \varphi_s \cos \hat{P} + \sin \hat{P} \,\text{cotg}\, \boldsymbol{Z}'$$

dovendo determinare ***Z'*** si porta $\boxed{\sin \varphi_s \cos \hat{P}}$ al primo membro

$$\text{tg}\, \delta \cos \varphi_s - \sin \varphi_s \cos \hat{P} = \sin \hat{P} \,\text{cotg}\, \boldsymbol{Z}'$$

e risolvendo rispetto a cotg ***Z'*** si avrà :

$$\text{cotg}\, \boldsymbol{Z}' = \frac{tg\delta \cdot \cos\varphi_s - \sin\varphi_s \cdot \cos\hat{P}}{\sin\hat{P}}$$

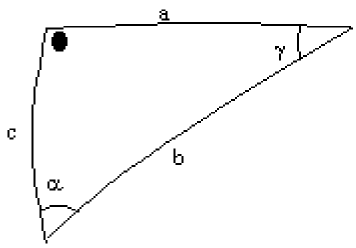
e finalmente :

$$\text{cotg } \boldsymbol{Z}' = \text{tg } \delta \cos \varphi_s \text{cosec } \hat{P} - \sin \varphi_s \text{ cotg } \hat{P}$$

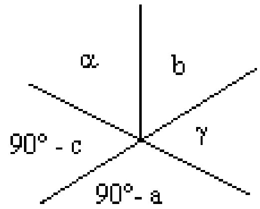
formula che fornisce l'angolo azimutale ***Z'*** e, successivamente, l'azimut α.

Regola mnemonica di Nepero

Se il triangolo sferico è ***rettangolo*** le formule adesso ricavate si semplificano notevolmente. Per risolvere un triangolo sferico rettangolo si fa ricorso alla *regola del pentagono di Nepero*. Allo scopo è necessario variare prima gli elementi del triangolo sostituendo ai due **cateti** i *complementi*.



triangolo sferico rettangolo



La regola dice che:

il coseno di un elemento è uguale :

- al prodotto dei **seni** degli elementi *lontani*
- al prodotto delle **cotangenti** degli elementi *vicini*

così volendo il coseno dell'angolo α avremo:

- $\cos \alpha = \sin b \sin (90° - c) = \sin b \cos c$
- $\cos \alpha = \text{cotg } (90° - a) \text{ cotg } \gamma = \text{tg } a \text{ cotg } \gamma$

Considerando via via tutti gli altri elementi del triangolo sarà possibile ottenere altre otto relazioni che permettono la risoluzione del triangolo stesso.

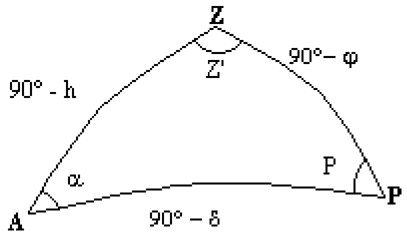
La regola mnemonica di Nepero è utilizzata in navigazione astronomica per risolvere il triangolo nautico in alcuni casi particolari.

Quando un astro si trova al ***passaggio al primo verticale orientale*** il suo azimut è α = 90° ed il triangolo di posizione è rettangolo. Applicando Nepero non bisognerà considerare l'angolo retto ma andranno considerati i complementi dei cateti ovvero h e φ al posto di quanto indicato in figura:

$$\cos (90°-\delta) = \sin \delta = \sin \varphi_s \sin h$$

che risolta rispetto a φ_s fornirà:

$$\sin \varphi_s = \frac{\sin \delta}{\sin \cdot h}$$



relazione che permette di calcolare la latitudine dell'osservatore in funzione della declinazione dell'astro e della sua altezza.

Per calcolare invece l'*istante* del passaggio al 1° verticale orientale è necessario calcolare l'angolo al polo, per cui si risolve il triangolo rettangolo rispetto a $\hat{P}$ ottenendo:

$$\cos \hat{P} = \text{cotg}\,(90° - \delta)\ \text{cotg}\,\varphi_s$$

e quindi :

$$\cos \hat{P} = \text{tg}\,\delta\ \text{cotg}\,\varphi_s$$

Con $\hat{P}$ si passa a $t = 360° - \hat{P}_E$

Sole, Luna, Pianeti		Stelle
$t =$		$t_* =$
$-\lambda =$		$-\lambda =$
$T =$		$T_* =$
		$-360° - \alpha$
$\longrightarrow$	$UT =$	$\leftarrow T_s$
	$+\lambda =$	
	$t_m =$	

Anche quando un atro si trova al ***passaggio al primo orario*** (orientale o occidentale) il triangolo astronomico risulta rettangolo, infatti l'angolo al polo $\hat{P}$ è uguale a 90°.

Applicando la regola mnemonica di Nepero sarà possibile ricavare il valore dell'angolo azimutale ***Z'*** e in funzione di questo l'azimut α ottenendo:

$$\cos \boldsymbol{Z'} = \text{cotg}\,(90° - h)\ \text{cotg}\,\varphi$$

e quindi :

$$\cos \boldsymbol{Z'} = \text{tg}\,h\ \text{cotg}\,\varphi$$

Lo schema di calcolo per stabilire l'istante ***t*** del passaggio al primo orario è il seguente:

Sole, Luna, Pianeti		Stelle
$\hat{P}$ **= 90°**		$\hat{P}$ **= 90°**
$-\lambda =$		$-\lambda =$
$T =$		$T_* =$
		$-360° - \alpha$
$\longrightarrow$	$U.T. = HH^h$	$\longleftarrow T_s =$
	$I_m = MM^m$	
	$T_m =$	
	$+\lambda =$	
	$t_m =$	

INDICE

1.	– La sfera Celeste	pag. 1
1.1	– Il moto apparente degli astri ……………………………………….	pag. 3
1.2	– Sfera Celeste Retta e sfera Celeste Parallela …………………...	pag. 5
1.3	– Sfera Celeste Geocentrica …………………………………………	pag. 6
2.	– Elementi di Cosmografia ……………………………………….	pag. 7
2.1.	– Il Sistema Solare ………………………………………………	pag. 7
2.1.1	– I Pianeti ……………………………………………………..	pag. 7
2.1.2	– Le Comete ……………………………………………………..	pag. 8
2.1.3	– La Luna ……………………………………………………..	pag. 9
2.1.4	– I moti di rivoluzione e le Eclissi ………………………………	pag. 10
2.2	– Le Stelle …………………………………………………….	pag. 11
2.2.1	– Le Costellazioni …………………………………………….	pag. 12
2.2.2	– La Stella Polare ………………………………………………	pag. 13
2.2.3	– Il Sole ………………………………………………………….	pag. 13
2.3	– Il tempo e la sua misura ……………………………………….	pag. 14
2.3.1	– La linea di separazione delle date ……………………….…	pag. 15
2.4	– Le Effemeridi Nautiche ……………………………………….	pag. 15
3.	– L' impiego delle osservazioni degli astri in navigazione astronomica	pag. 16
3.1	– Il sestante ……………………………………………………..	pag. 16
3.2	– La Circonferenza d'altezza …………………………………….	pag. 17
3.2.1	– La retta d'altezza (metodo Saint Hilare) ……………………….	pag. 19
3.3	– Costruzione della carta approssimata di Mercatore …………….	pag. 21
3.4	– Il trasporto delle rette d'altezza …..…………………………….	pag. 21
4.	– La bisettrice d'altezza …………………………………………..	pag. 22
5.	– Calcolo dell'istante del passaggio di un astro al meridiano …….	pag. 23
6.	– Passaggio del Sole al meridiano mobile della nave ……………..	pag. 24
7.	– Calcolo dell'istante del sorgere di un astro ……………………...	pag. 24
8.	– Determinazione della latitudine mediante l'altezza della polare ..	pag. 25
9.	– Richiami di trigonometria sferica ……………………………….	pag. 26
INDICE	……………………………………………………..……	pag. 30