Paolo Di Candia

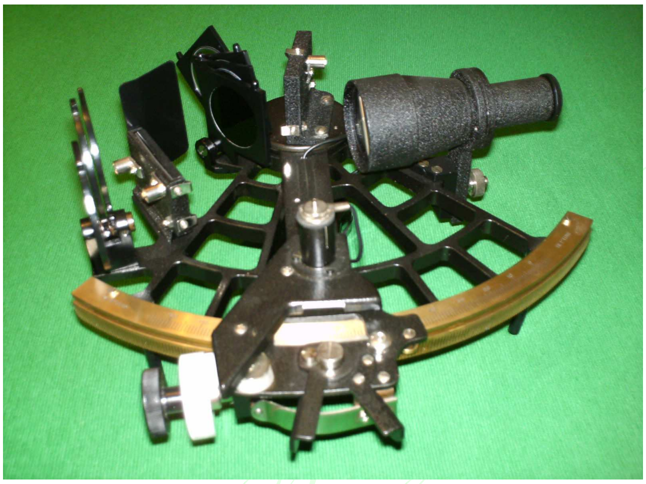
Appunti di SCIENZE DELLA NAVIGAZIONE E TECNOLOGIE NAVALI 3-I A

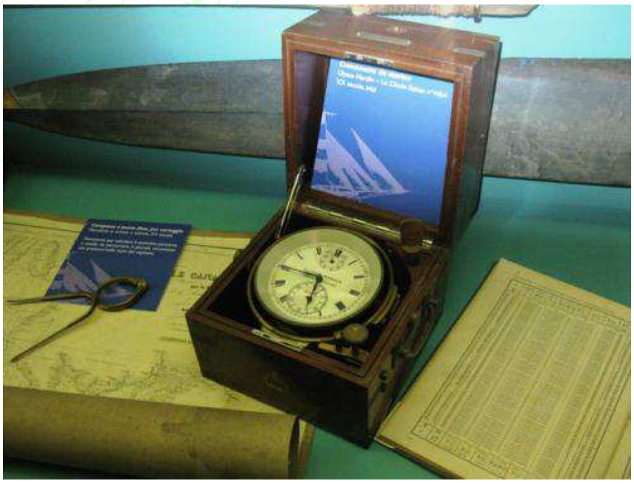
NAVIGAZIONE ASTRONOMICA

"Se Pitagora avesse posto il copyright sulle sue tabelline non saremmo mai arrivati sulla Luna"   (Pelagusplus)

COMPETENZA IN ESITO N° 5
ORGANIZZARE IL TRASPORTO IN RELAZIONE ALLE MOTIVAZIONI DEL VIAGGIO ED ALLA SICUREZZA NEGLI SPOSTAMENTI

Abilità	Pianificare e controllare l'esecuzione degli spostamenti con metodi tradizionali e con l'ausilio di sistemi informatici utilizzando i software specifici.
Conoscenze	- Metodi per ricavare la posizione con misure rispetto ad ASTRI.
Contenuti	- Luogo di posizione (L.o.p. = Lane of position) - Determinazione della posizione - La precisione nella determinazione della posizione





IL PUNTO NAVE ASTRONOMICO

INTRODUZIONE

La *Navigazione Astronomica* è un tipo di navigazione effettuata con l'ausilio degli astri visibili (Stelle, Pianeti, Sole e Luna). Essa è fra le più antiche tecniche di navigazione e rappresenta sicuramente il metodo più affidabile tra quanti a tutt'oggi in uso anche alla presenza delle metodologie satellitari. La tecnica è completamente autonoma, non ha bisogno di supporti tecnologici provenienti dalla terraferma o dallo spazio.
L'Astronomia Nautica rappresenta la più interessante branca della navigazione tradizionale, offrendo il modo di determinare la posizione in mare ovvero il *"Punto Nave"* che rimane a tutti gli effetti l'elemento inconfutabilmente indispensabile per la corretta e sicura gestione dello spostamento.
Questa tecnica della navigazione, si rende indispensabile nelle traversate oceaniche e/o d'altura ovvero, quando non in presenza di metodologie alternative, ossia quando in lontananza dalla costa mancano i riferimenti ottici quali Fari, Fanali e/o segnali e punti cospicui per poter in modo sicuro condurre la navigazione.

I metodi utilizzati nella determinazione del punto nave mediante osservazioni astronomiche hanno subito una continua evoluzione fino a quelli attualmente in uso, che impiegano le *circonferenze* e le *rette d'altezza.*

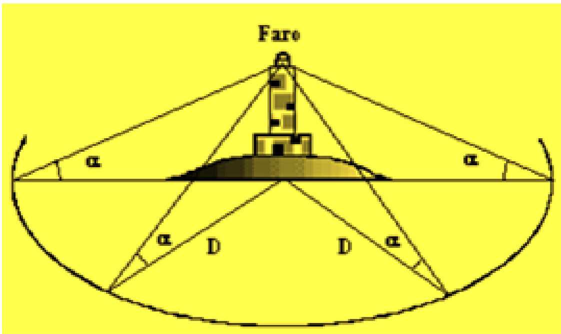
Sestante HORIZON-CASSENS & PLATH per la misura delle altezze degli astri.

Gli strumenti necessari per tali osservazioni sono: il *sestante* ed il *cronometro.* Entrambi sono stati oggetto di notevoli miglioramenti ed attualmente sono strumenti affidabili e di costo relativamente basso da consentirne la diffusione anche a bordo di piccole imbarcazioni da diporto.
Il sestante è uno strumento ottico che consente di misurare l'altezza di un astro, ossia la sua elevazione rispetto all'orizzonte marino. Per poterlo impiegare è necessario osservare contemporaneamente gli astri e l'orizzonte; di giorno ciò è possibile soltanto col Sole e, in certi casi, con la Luna. Con tutti gli altri astri le due condizioni citate si verificano contemporaneamente soltanto durante i *crepuscoli nautici.*

Il cronometro serve per stabilire con precisione l'ora in cui si misura l'altezza di un certo astro, in modo da calcolare, tramite le *effemeridi nautiche,* la sua esatta posizione sulla volta celeste.

La circonferenza d'altezza

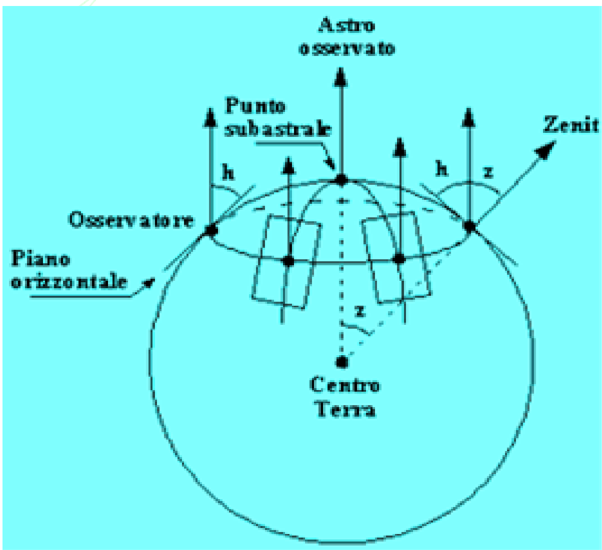
Per comprendere il metodo del punto nave astronomico e per dare il concetto di cerchio d'altezza si consideri la figura seguente. Misurando con un sestante l'angolo fra le direzioni in cui si osservano la base e la sommità di un faro, conoscendo l'altezza di quest'ultimo, è possibile calcolare la distanza *D* da esso. Se diversi osservatori, situati in differenti posizioni, misurano lo stesso angolo α, si trovano necessariamente alla medesima distanza dal faro e quindi su un cerchio con centro nella sua base e raggio pari alla distanza *D.* Tale cerchio, in navigazione, prende il nome di *cerchio di distanza.*



Cerchio di uguale distanza

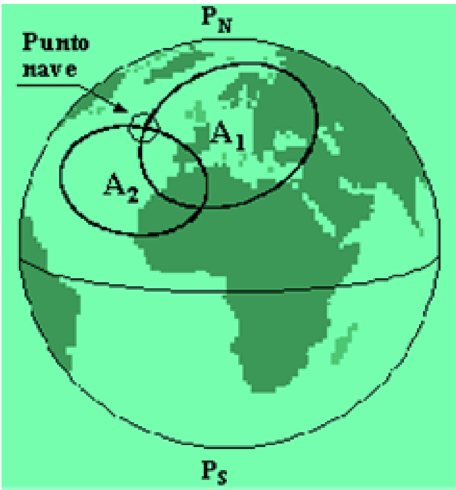
Diversi osservatori che misurano lo stesso angolo α si trovano tutti su una circonferenza con centro nella base del Faro e raggio pari alla distanza D.

Nel caso astronomico si verifica una situazione analoga, con l'unica notevole differenza che, mentre il faro è un punto fisso, un astro si sposta continuamente per effetto del moto diurno della Terra. E' pertanto necessario stabilire con precisione l'ora di osservazione in modo da poter determinare la posizione sulla superficie terrestre del *punto sub-astrale,* ossia del punto dal quale l'astro in considerazione si vedrebbe esattamente allo Zenit.



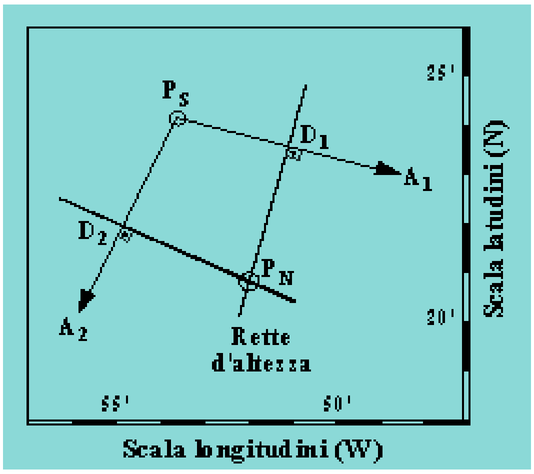
Diversi osservatori che misurano contemporaneamente la stessa altezza di un astro si trovano su una circonferenza che ha per centro il punto sub-astrale e raggio sferico pari alla distanza zenitale. Tale circonferenza si chiama circonferenza d'altezza.

Un osservatore, che misura in un certo istante l'altezza *h* di un astro, si trova dal punto sub-astrale ad una distanza pari alla *distanza zenitale z*, che è il complemento dell'altezza. Ad esempio, se l'altezza misurata col sestante è $h = 40°$, la distanza zenitale è $z = 90° - h = 50°$. Tale distanza corrisponde anche all'angolo al centro della Terra sotteso dall'arco di circonferenza tracciato fra il punto sub-astrale e l'osservatore. Convertendo il suddetto angolo in primi, si ottiene la distanza in miglia nautiche fra i due punti sopracitati, nell'esempio fatto, essa è 3000 miglia, corrispondenti a 5556 km.
Se nello stesso istante un astro viene osservato da più punti della superficie terrestre, data l'enorme distanza dei corpi celesti, tutte le direzioni di osservazione sono praticamente parallele, inoltre, per quanto detto precedentemente, se gli osservatori misurano anche la stessa altezza h, si trovano allora tutti alla medesima distanza dal punto sub-astrale. Il cerchio sul quale essi vengono a trovarsi si chiama *circonferenza d'altezza* (*cerchio d'altezza,* nel gergo nautico) ed ha il centro nel punto sub-astrale e raggio pari alla comune distanza zenitale.



L'intersezione di due circonferenze di uguale altezza consente di determinare la posizione della nave in mare.

Se da bordo di una nave si misurano quasi simultaneamente le altezze di due astri, su un mappamondo è possibile, dopo opportuni calcoli, individuare le posizioni dei due punti sub-astrali, A_1 *ed* A_2, e da essi tracciare i cerchi d'altezza relativi. I cerchi s'intersecano in due punti in cui potrebbe trovarsi la nave, tuttavia uno può essere certamente scartato data la sua eccessiva distanza dalla posizione stimata della nave.
Il metodo descritto è poco pratico ed inoltre si è calcolato che per fare le cose con un minimo di precisione sarebbe necessario un mappamondo di circa *7 m di diametro.*
Per quanto visto precedentemente, il raggio di un cerchio d'altezza può essere di qualche migliaio di chilometri, pertanto, per tratti brevi, esso si può tranquillamente considerare rettilineo e coincidente con la tangente allo stesso cerchio. Tale considerazione suggerisce il metodo adottato in pratica, consistente nel tracciare sulla carta nautica le tangenti ai cerchi d'altezza che sono in prossimità del punto stimato.

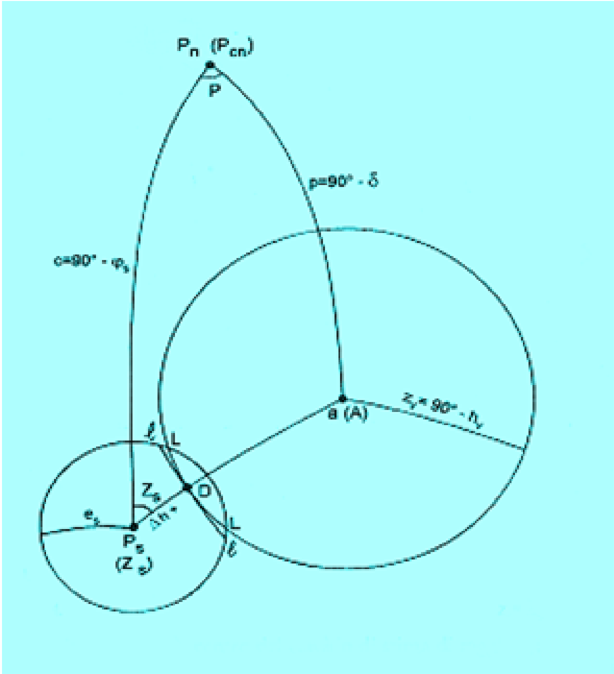


Le rette d'altezza, tracciate a partire dal punto stimato P_S, si intersecano nel Punto nave P_N

In figura è mostrato il metodo utilizzato: dal punto stimato (Ps) si tracciano le direzioni in cui si osservano i due punti sub-astrali A_1 ed A_2 e, dopo opportuni calcoli ed in base alle altezze misurate, si individuano su tali direzioni altri due punti, D_1 e D_2. Da questi ultimi si conducono le rette perpendicolari alle direzioni PsD_1 e PsD_2; le due rette sono dette *rette d'altezza* in quanto coincidenti, come visto in precedenza, con i cerchi d'altezza.
L'intersezione delle due rette individua la posizione della nave (Pn), le cui coordinate geografiche possono essere lette sulle relative scale. In effetti l'Ufficiale di Guardia non si limita ad osservare soltanto due astri, ma effettua una serie ridondante di osservazioni, minimo tre o quattro, in modo da attenuare gli effetti degli inevitabili errori commessi durante le misure.

LA RETTA DI ALTEZZA

La circonferenza di altezza, luogo di posizione della nave in seguito ad una misura di altezza di un astro in un dato istante, è rappresentata sulla *carta di Mercatore* da una curva *(curva di altezza),* il cui tracciamento è complesso. D'altra parte non è necessario considerare l'intero luogo di posizione perché si dispone sempre di un *punto stimato P_S,* che è il centro del cerchio di stima entro cui si trova certamente la nave.



Cerchio d'altezza (raggio z_v = 90° - h_v), cerchio di stima (raggio e_s), triangolo di posizione P_{cn}-Z_s-A), punto sub-astrale a(A), punto stimato P_s (Z_s), polo elevato nord P_n (P_{cn}).

La circonferenza del cerchio di stima, di raggio e_S, interseca la circonferenza d'altezza nei due punti LL, arco utile; la nave si trova in un punto dell'arco LL.
L'arco di verticale stimato *ZsA (Psa),* interseca perpendicolarmente l'arco LL nel punto determinativo D. L'arco LL può essere sostituito, con lecita approssimazione, da un arco di circolo massimo *ℓℓ* tangente nel punto D. A sua volta arco di circolo massimo *ℓℓ* può essere sostituito sempre dall'*arco lossodromico* con il quale, in pratica, si identifica.
Si definisce *retta di altezza Saint-Hilaire: "L'arco lossodromico ℓℓ tangente all'arco utile della circonferenza di altezza nel punto determinativo D. La retta di altezza è sempre ortogonale alla direzione azimutale dell'astro".*

Essendo *AZs* un arco di circonferenza massima, questo incontra perpendicolarmente il cerchio minore; ciò comporta che qualunque sia la posizione dell'osservatore, esisterà sempre il punto di intersezione *D*. Risulta evidente che questo metodo, non presenta situazioni limite. Il punto determinativo *D* è detto anche punto ravvicinato perché fra tutti i punti determinativi è quello più vicino alla posizione stimata e cade sempre nella zona di certezza.
La posizione del punto determinativo è calcolata considerando il triangolo di posizione stimato, in cui sono noti: due lati ($Pe\ Zs = c = 90° - \varphi_s$), ($Pe\ A = p = 90° - \delta$) e l'angolo al polo *P*(*t*). Dalla sua risoluzione si ricavano sia l'*altezza stimata* che l'*azimut stimato* dell'astro con le due relazioni fondamentali:

1. tramite le Effemeridi si calcolano *(Tc + K = Tm o UT)*

$$t\ ,\ P,\ \delta$$

2. con Eulero si calcola *hs*

$$sen\ h_s = sen\varphi_s \bullet sen\ \delta + cos\varphi_s \bullet cos\delta \bullet cos\ P$$

3. *con la formula delle cotangenti Zs*

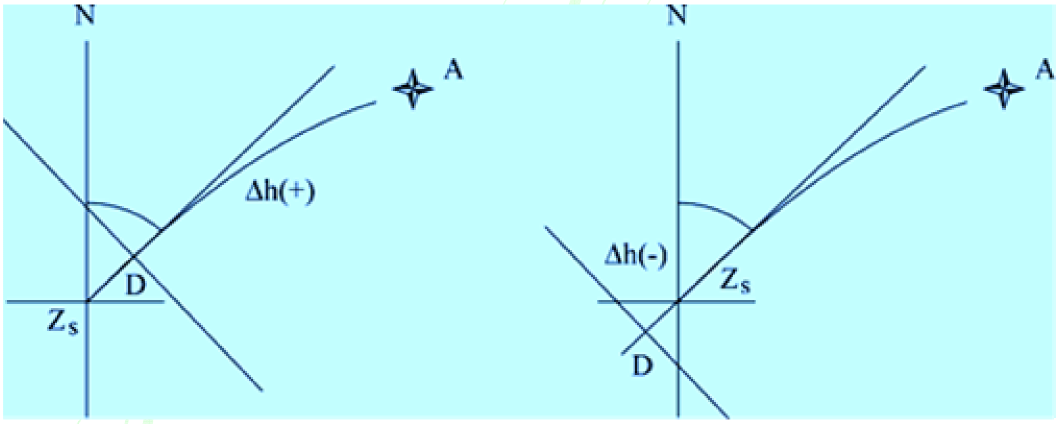
$$\cot Z_s = \frac{\cos \varphi_s \cdot \tan \delta}{senP} - \frac{sen\,\varphi_s}{\tan P}$$

Nota h_s e quindi la distanza zenitale corrispondente $z_s = 90° - h_s$ si può osservare:

$$ZsD = ZsA - DA = z_s - z_v = 90° - h_s - 90° + h_v = h_v - h_s$$

$$\Delta h = h_v - h_s$$

La quantità Δh , *differenza di altezza,* fornisce lo spostamento che il punto determinativo *D*, ha dal punto *Zs*; la distanza *DZs*, espressa in primi di circonferenza massima o in miglia, è contata lungo il verticale stimato *ZsA* che definisce la direzione dal punto astrale il punto stimato *Zs* e che forma con il meridiano stimato *PeZs* un angolo dato dall'*azimut stimato as;* quest'ultimo si ricava direttamente dall'angolo azimutale *Zs.*
Il segno *(+)* di Δh indica che il punto determinativo *D* è spostato *verso l'astro A*, il segno *(-)* indica che la retta è spostata nella parte *opposta ad A.* Infatti, se si fissa la regola di sottrarre sempre l'*altezza stimata* (calcolata) *hs* all'*altezza vera* (misurata) *hv* , nel primo caso *Δh è positivo*, nel secondo caso *Δh è negativo* (v. figura 6.7).
La retta di altezza si traccia sul punto determinativo *D* (punto appartenente alla circonferenza di altezza) perpendicolarmente alla direzione dell'azimut a_s .



Retta di altezza Saint-Hilaire: Δh (+) e Δh (−)

Tracciamento delle rette di altezza

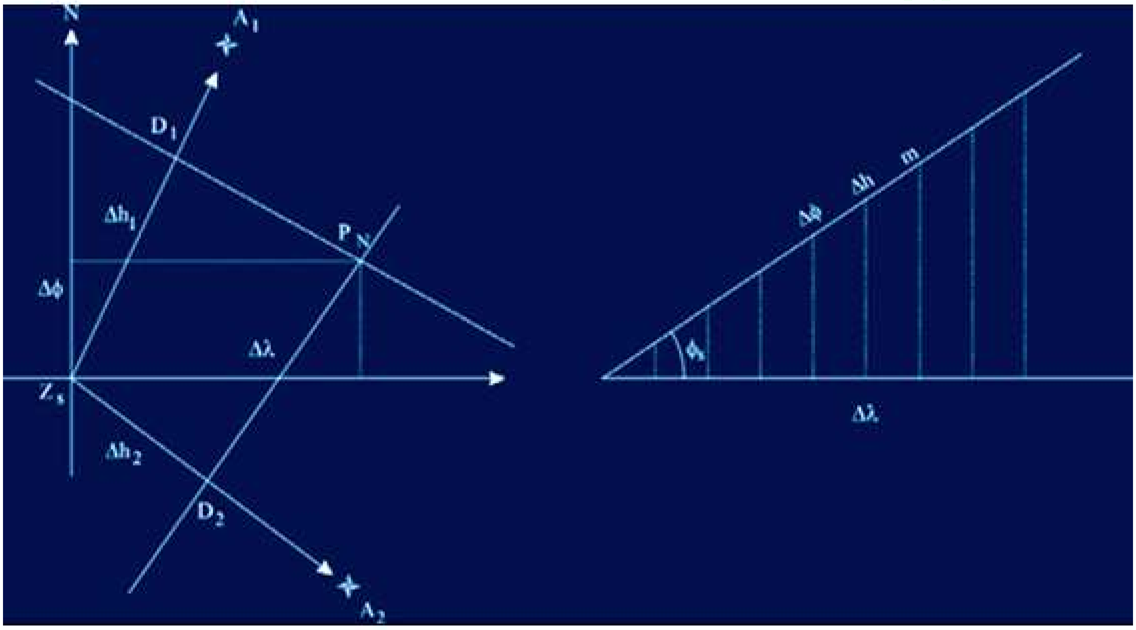
Le carte che si usano per il tracciamento delle rette di altezza sono il piano nautico ed il piano di Mercatore. L'area interessata al tracciamento è sempre molto limitata ed è centrata sul punto stimato *Zs* .
Per il piano di Mercatore occorre tener conto delle due scale:

- scala delle latitudine;
- scala delle longitudini.

La *scala delle latitudini* è usata anche per misurare i Δh e le *distanze in miglia* (da ricordarsi che 1' di latitudine è dato da 1' di longitudine moltiplicato per la $sec\varphi$). Le scale, dopo aver fissato la lunghezza del 1', si costruiscono con il triangolo delle *latitudine medie* (in questo caso la latitudine è quella dello *Zs*).

Per il tracciamento della retta di altezza occorre procedere alle seguenti operazioni:

- misurare con il sestante l'altezza dell'astro *hi* e fissare al cronometro l'istante dell'osservazione *UTC*;
- apportare le dovute correzioni all'altezza strumentale *hi* per ottenere la corrispondente altezza vera *hv* riferita all'orizzonte vero o astronomico dell'osservatore;
- apportare la correzione dello stato del cronometro *k* per ottenere l'effettivo istante di misura dell'osservazione *UTC = Tm =Tc +* (± *K)*
- ricavare dalle effemeridi nautiche, per l'istante *UTC*, l'angolo orario dell'astro T_a riferito al meridiano fondamentale di Greenwich con la sua declinazione δ_a ;
- trasformare l'angolo orario T_a in t_a , per mezzo della longitudine stimata dell'osservatore λ_S;
- risolvere il triangolo sferico effettuando la trasformazione da coordinate locali orarie t_a, δ_a in coordinate altazimutali *Zs* , *hs,* rispetto al punto stimato P_s (φ_S, λ_S);
- eseguire la differenza algebrica $\Delta h = \pm (h_V - h_S)$;
- procedere al tracciamento della retta d'altezza.

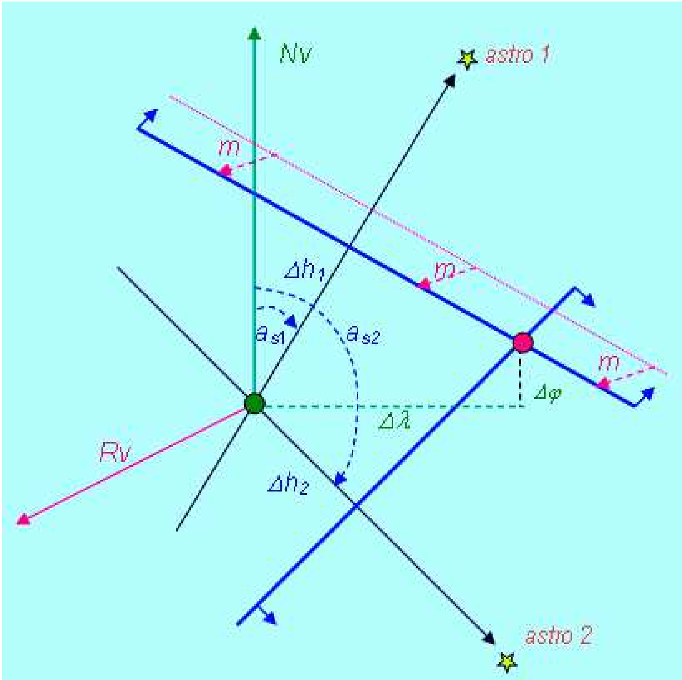


Punto nave con due rette di altezza tracciate su un piano di Mercatore

L'esempio considerato è per *osservazioni simultanee*. Quando le *rette sono intervallate* occorre effettuare il *trasporto*: normalmente si trasportano le osservazioni all'*istante dell'ultima osservazione.* Nel caso del trasporto, ovviamente occorre supporre che la *rotta* è la *velocità* siano costanti durante l'osservazione.
Il trasporto delle rette, normalmente, è effettuato *graficamente* come si fa in navigazione costiera. E' possibile,anche usare il *trasporto analitico* modificando il valore di Δh dato dal seguente prodotto scalare:

$$\Delta h_t = \Delta h + m \cdot \cos (R_v - a_S)$$

con *m* il percorso effettuato nell'intervallo tra le misure.



Punto nave con due rette di altezza (trasporto grafico, 1^ retta all'istante della seconda)

ACCURATEZZA DELLA POSIZIONE

Generalità

La retta di altezza è definita, come già detto, dai parametri *(Δh, a_S)* e si determina osservando l'altezza di un astro. Tale misura angolare è affetta da errori per cui il suo utilizzo nella determinazione della posizione è legato agli errori sia di misura che di calcolo dei due parametri di cui essa è definita.
Nella differenza di altezza Δh entrano l'*altezza osservata* e corretta *hv* e l'*altezza stimata* calcolata *hs* . La prima, elemento osservato, si misura con il sestante, perciò rimane affetta dagli eventuali errori che può commettere l'*osservatore*, dagli *errori dello strumento* di misura *(sestante);* infine, dagli errori che dipendono dall'*ambiente circostante (depressione dell'orizzonte, scarsa visibilità, rifrazione astronomica, ecc.).* La seconda, elemento calcolato, insieme con l'azimut stimato a_s *(Zs)*, si determina in funzione delle *coordinate stimate* e del *tempo del cronometro Tc* .
Rimane da considerare un eventuale *errore sul cronometro*, che ha per effetto, di variare le coordinate orarie dell'astro osservato.
Se, inoltre, le osservazioni usate per la determinazione della posizione *non sono simultanee* o considerate tali, occorre considerare anche gli *errori di trasporto* legati alla *stima del cammino* e della *rotta della nave.*

Classificazione degli errori

Quando si procede alla misura di una grandezza di qualsiasi specie (*distanza, angolo, tempo, area, ecc.)*, la grandezza misurata è sempre affetta da errori che possono essere raggruppati in due distinte classi:

- classe di errori che nella misura influiscono sempre nello stesso modo *(errori sistematici);*
- classe di errori che con uguale probabilità possono essere positivi o negativi; questi errori sono detti *accidentali o aleatori (casuali).*

Nel nostro caso, le rette di altezza devono essere considerate affette sia da *errori accidentali* che da *quelli sistematici.*

Errori nelle rette di altezza

Si definisce *errore* la differenza ε tra il valore della *grandezza misurata* X_{er} ed il valore della *grandezza esatta incognita* X_{es} *:*

$$\varepsilon = X_{mis} - X_{es}$$

La correzione c è il contrario dell'errore:

$$c = X_{es} - X_{mis}$$

quindi : $c = -\varepsilon$, ossia $X_{es} = X_{mis} + c$.

In un gruppo di osservazioni (2-3-4 o più altezze di astri),l'osservatore commette vari errori, taluni di natura accidentale, altri di carattere sistematico, e le probabili cause sono:

1. *Depressione dell'orizzonte marino.* Il valore medio è dato da $i_m = 1',77\sqrt{e}$; l'errore εi_m può essere *accidentale*, quando le osservazioni sono intervallate; è quasi sempre *sistematico* con osservazioni simultanee o quasi;
2. *Rifrazione astronomica.* Il valore medio r_m = 58",3·cotg h_{ar} ; l'errore εr_m è di natura *accidentale* perché le altezze degli astri sono quasi sempre differenti tra loro;
3. *Errore personale.* Comprende una componente *sistematica di collimazione (acuità visiva)* e una componente *accidentale (condizioni fisiologiche o psico-fisiche)* dell'osservatore;
4. *Condizioni ambientali avverse.* L'errore, detto di *"osservazione"* è di natura accidentale. Esso è dovuto al mare mosso, vento sfavorevole, orizzonte non ben definito;
5. *Errori strumentali.* La determinazione non precisa della *correzione d'indice* γ_c è fonte di *errore sistematico* che si riflette su tutte le misure di altezze;
6. *Errore sul tempo del Cronometro.* Ogni misura è accompagnata dall'istante di osservazione T_c, a cui si aggiunge la *correzione assoluta* del cronometro *K* per determinare l'ora T_m. Se $\varepsilon^s{}_\tau$ è l'errore in secondi di tempo, si dimostra che l'errore corrispondente sulla retta d'altezza:

$$e'_\tau = -\frac{\varepsilon_\tau^s}{4}\cos\varphi \cdot sena$$

La formula dimostra che l'influenza dell'errore sul cronometro è nullo quando a = 0° o 180° *(osservazioni meridiane)*; è massimo con azimut 90° o 270° *(osservazioni al 1° verticale);*

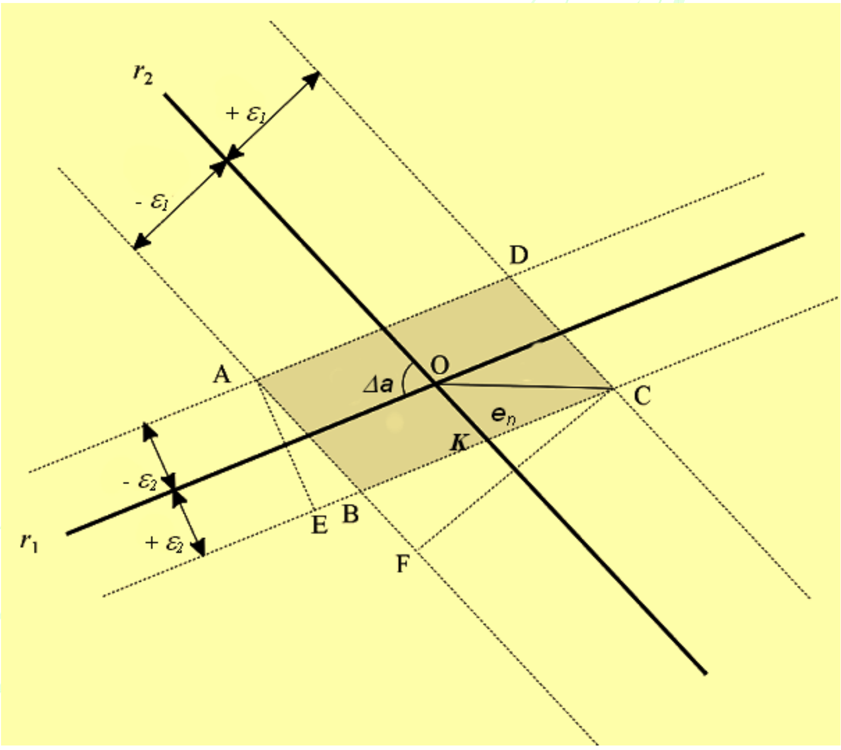
7. *Errore di trasporto.* Gli elementi di stima, *Rotta e cammino*, non sono precisi; ogni volta che si opera un trasporto di un luogo di posizione per un istante successivo (o antecedente) si commette un errore chiamato *"errore di trasporto"* e_t;

8. *Errori grafici.* Sono dovuti al tracciamento della retta di altezza sul foglio quadrettato *(Carta di Mercatore approssimata)*. Oggigiorno sono disponibili numerosi software per la determinazione del punto nave astronomico;
9. *Errore di scostamento.* E' determinato dalla sostituzione dell'arco di circonferenza di altezza con l'arco utile di lossodromia tangente $(y = d^2/2 \cdot tang\ h \cdot sen\ 1')$.

La somma algebrica degli errori $\sum e\ (\varepsilon)$ di una retta d'altezza, induce a considerare intorno a tale retta calcolata altre due rette distanti del *massimo errore* commesso *positivo* o *negativo*, determinando la *"striscia di posizione".*
In presenza di 2 rette di altezza si definisce *"parallelogramma di certezza"* la superficie comune delle due strisce di posizione. La nave si trova in un punto del parallelogramma di certezza.

Punto astronomico ed incertezza della posizione con due rette di altezza

Nella figura seguente sono riportate due rette di altezza (r_1,r_2) che si intersecano nel punto *O*; nell'ipotesi che le rette siano esenti da errori il *punto O rappresenta la posizione astronomica* ottenuta per mezzo delle due osservazioni.



Intersezione di due rette di altezza – incertezza della posizione

Siano $\pm\ \varepsilon_1\ ,\ \pm\ \varepsilon_2$ gli errori massimi di cui sono affette le due rette. La posizione dell'osservatore va ricercata all'interno del parallelogrammo *ABCD*, delimitato dalle rette parallele alle due rette di altezza distanti da esse degli errori massimi; l'area delimitata definisce l'*area di certezza* o *di incertezza* e fornisce l'*incertezza della posizione O* che può essere anche rappresentata dalla *semidiagonale dello stesso parallelogrammo* (la semidiagonale fornisce il raggio della circonferenza di centro *O*).

La semidiagonale, applicando il teorema di Carnòt al triangolo *OKC*, è data da:

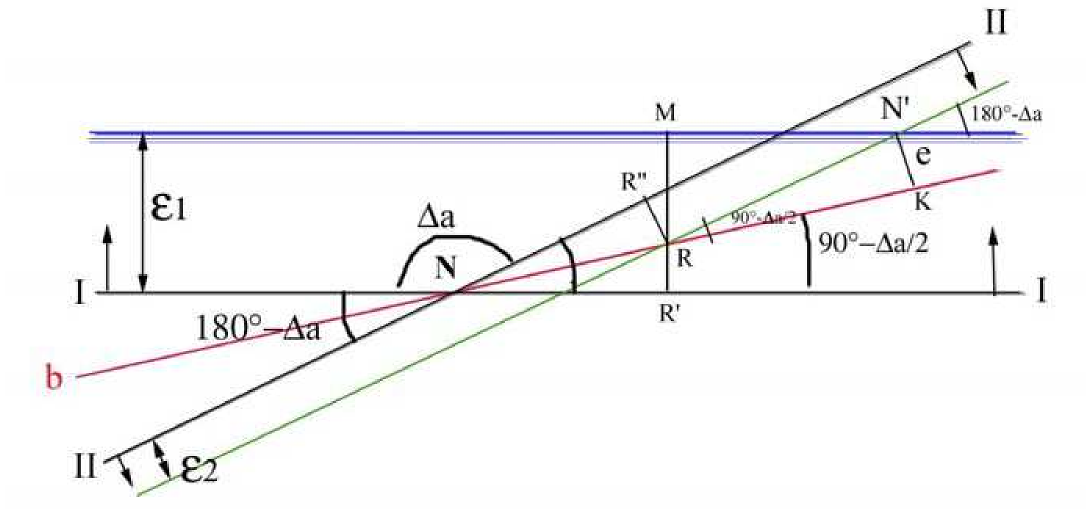
$$e_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \cos\Delta a}}{sen\Delta a}$$

in cui en è tanto più piccolo quanto più Da si approssima a 90°. Per *Δa = 90°* si ha e_n minimo:

$$e_{n\,MIN} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$$

Bisettrice di altezza

Nelle osservazioni simultanee o quasi, quando si possa ritenere prevalenti gli errori costanti *(sistematici),* viene presa in considerazione la *bisettrice dell'angolo (180° - Δa)* tra le due rette. Essa si identifica come bisettrice degli angoli dove le frecce delle rette *"si guardano"* o entrambe *"si sguardano".*



Errori accidentali – incertezza della bisettrice di altezza

Gli errori relativi alle due misure delle due altezze sono:

$$\varepsilon_1 = e_s + e_{a1}$$
$$\varepsilon_2 = e_s + e_{a2}$$

Disuguali, per la presenza, oltre che degli errori sistematici e_s, di errori accidentali variabili (e_{a1}, e_{a2}). *La bisettrice d'altezza è il luogo diposizione esente dall'errore sistematico complessivo delle due altezze.*

Il punto N' non cade sulla bisettrice. La distanza NK del punto nave dalla bisettrice è l'errore della bisettrice *"e_b".* Si dimostra che:

$$e_b = \frac{e_{a2} - e_{a1}}{2 sen \frac{\Delta a}{2}}$$

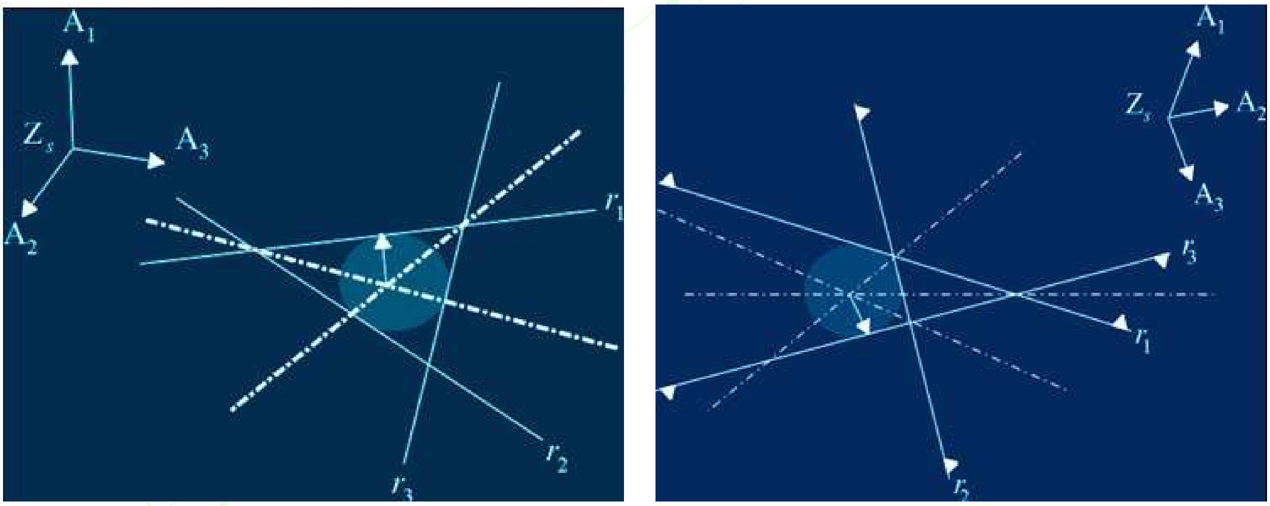
Dalla formula si deduce che:

- e_b è esente dall'errore sistematico commesso nelle misure;
- sono presenti solamente gli errori accidentali con la loro differenza;
- e_b è tanto miniore quanto più la differenza di azimut Δa è prossima a 180°;
- per $\Delta a = 180°$ si ha il minimo errore, $e_b = (e_{a2} - e_{a1}) / 2$.

Dicesi *ottima* la bisettrice di due rette aventi $\Delta a = 180°$.

Punto nave con tre rette di altezza

Due rette di altezza, affette da errore sistematico forniscono un sicuro luogo di posizione (bisettrice) ma non permettono di determinare la grandezza di questo errore presente nelle misure. Per ottenere l'entità dell'errore
sistematico occorre *una terza misura* come riportato nelle figure successive, nel punto stimato *Zs*, con le direzioni degli astri osservati.



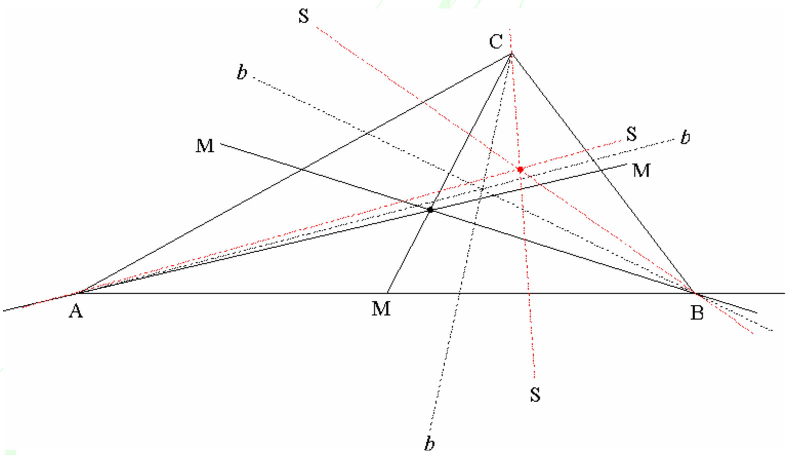
Area di certezza ed errore sistematico.
Il Punto nave scelto sulle bisettrici di altezza (1° INCENTRO – 2° EXCENTRO) non è influenzato dagli errori sistematici commessi nelle tre misure di altezza.

Le rette r_1, r_2 , r_3 relative a tre osservazioni di astri danno luogo ad un triangolo (*triangolo di certezza*) e le bisettrici associate alle coppie di rette determinano la posizione dell'osservatore. La distanza di questo punto dalle rette di altezza fornisce l'*errore sistematico* e_s . L'errore sistematico è *positivo* se dal centro del triangolo il verso è rivolto all'astro altrimenti è negativo. Il punto *O* cade all'interno del triangolo di certezza se la somma delle tre differenze d'azimut Δa_1 , Δa_2 , Δa_3 è maggiore di 180°.
Risulta evidente che, quando il punto cade fuori dell'area di certezza, occorre dare poca fiducia al punto nave ottenuto con le tre bisettrici che si incontrano all'esterno. Nella pratica di bordo, quando si

verifica tale geometria delle rette di altezza, si dà fiducia alle rette r_1 , r_3 e la posizione si determina con l'intersezione con la terza retta r_2 . In questo caso, comunque, è sempre l'osservatore che dà fiducia alle rette perché conosce le condizioni di osservazione delle misure di altezza degli astri.

Punto più probabile (PPP) con 3 rette di altezza (con le simediane)

Il metodo grafico permette, nel caso di tre rette di altezza, di trovare il *punto più probabile* con l'intersezione delle tre *simediane.*
Sia *ABC* il triangolo definito da tre osservazioni di astri i cui lati rappresentano tre rette di altezza. Il calcolo statistico *(metodo dei minimi quadrati)* permette di determinare graficamente il *punto più probabile* come intersezione delle tre *simediane.* Per definizione, la simediana è una retta simmetria alla mediana rispetto alla bisettrice.
Si consideri il triangolo seguente, nel quale, a partire dal vertice *A* al *BC*, opposto *A*, sono state tracciate la mediana (*AM*), la bisettrice (*Ab*) e la simediana (*AS*). il punto *L* individuato dalle simediane rappresenta il punto che soddisfa la condizione del punto più probabile. Il punto L è detto Punto *Lemoine.*
La figura fornisce la differenza tra *punto più probabile* trovato per mezzo delle tre *simediane* ed il punto definito con le tre *bisettrici.*



Punto astronomico (PPP) con intersezione delle tre simediane

Punto nave con quattro rette di altezza

L'*area di certezza* o di *incertezza* può essere migliorata calcolando la posizione astronomica con 4 o più rette di altezza. Nel caso specifico di punto nave astronomico con 4 rette di altezza affette da errore sistematico è possibile ottenere il punto con l'intersezione di due *bisettrici ottimali* considerando quelle ottenute da rette di altezza che differiscono di una *differenza d'azimut circa 180°* (rette opposte) .
Con questa configurazione, supposto che le due bisettrici siano affette da due differenti errori (accidentali), la statistica ci fornisce l'incertezza del punto nave astronomico.

Se le zone di certezza delimitate dalle due coppie di rette di altezza rispetto alle quale sono tracciate le bisettrici hanno uguale ampiezza, la distanza del punto ottenuto dall'incontro delle due bisettrici da una delle quattro rette fornisce l'errore sistematico di cui sono affette le bisettrici. Se le zone di certezza delimitate dalle coppie di rette non hanno la stessa ampiezza, l'errore sistematico può essere considerato come ottenuto dalla media delle due distanze minime del punto di incontro delle bisettrici da una retta di ciascuna coppia.
Se indichiamo con d_1 e d_2 le *distanze* considerate come *errori*, l'*errore sistematico delle bisettrici* è:

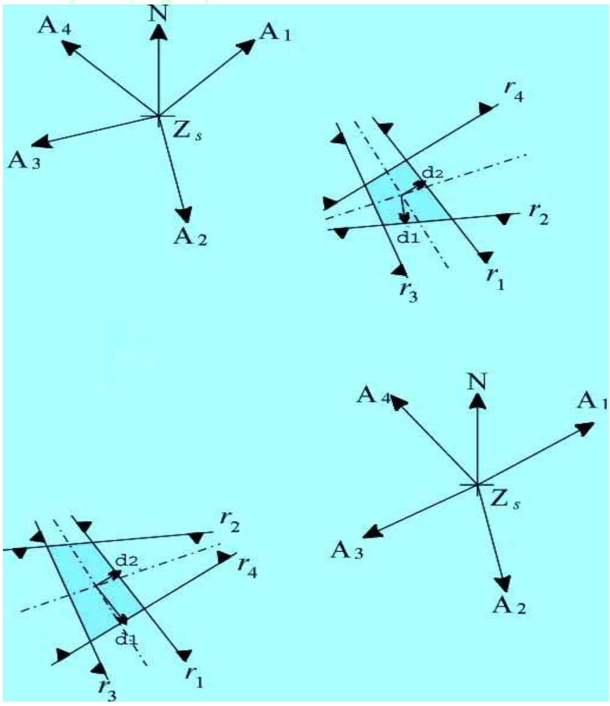
$$\varepsilon_s = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Le distanze diverse indicano la presenza di errori variabili, *accidentali:*

$$\varepsilon_a = \pm |d_1 - d_2|$$

Il segno delle distanze sono: *(+)* quando le frecce *"sguardano"* il *Pn* ; *(–)* quando le frecce *"guardano"* il *Pn.*

L'errore accidentale è *piccolo* quando gli errori hanno lo stesso segno; nel caso contrario l'errore accidentale è *grande*. Quest'ultima situazione si verifica quando l'errore di una coppia ha segno contrario dell'altra coppia.
Il Punto Nave è *ottimo* quando l'*errore accidentale* è *nullo o irrilevante*. Quanto più è *grande* ε_a tanto più *decresce l'attendibilità* del *Pn.* Con $\varepsilon_a < \pm 0',5$: *Punto nave Buono;* con $\varepsilon_a < \pm 1',0$: *Punto nave Sufficiente;* con $\varepsilon_a > \pm 2',0$: *Punto nave non attendibile.*



Area di certezza con 4 rette di altezza - Errori (distanze) d_1 e d_2 delle bisettrici dalle rette di altezza

Determinazione del punto (FIX) astronomico

Nella letteratura anglosassone il termine *FIX* sta per calcolo della posizione della nave. Per determinare il FIX astronomico occorrono almeno due osservazioni astronomiche. Il FIX astronomico può essere ottenuto con i due seguenti metodi:

- *analitico;*
- *grafico.*

Il *metodo analitico* richiede l'utilizzo dell'equazione della retta di altezza ricavata dalla linearizzazione matematica della circonferenza di altezza; le coordinate del Punto Nave sono date dalla soluzione del sistema costituito da due equazioni associate alle due osservazioni. Quando si effettuano più di due osservazioni, la soluzione va cercata nella *tecnica dei minimi quadrati.*
Il *metodo grafico* permette di determinare la posizione dell'osservatore tracciando le rette di altezza sul *piano di Mercatore* (oppure sul piano nautico).
Con due rette di altezza il FIX è dato dall'intersezione delle due rette; nel caso di più rette (tre o quattro rette) la soluzione va cercata di norma con il *tracciamento delle bisettrici* di altezza che *eliminano gli errori sistematici* di cui sono affette le misure effettuate. Nel metodo grafico, comunque occorre tener presente delle regole ricavate nella teoria dell'incertezza della bisettrice di altezza dovuta alla presenza degli errori accidentali. Altro aspetto che occorre considerare nel tracciare le rette di altezza e che le osservazioni, non essendo simultanee, occorre procedere al *trasporto* che può essere effettuato *graficamente* oppure *analiticamente.* E', inoltre, importante ricordare che la statistica permette di determinare, dal grafico, sia l'*errore sistematico* che quello *accidentale* di cui sono affette le misure.

Esempio n°1.

Al crepuscolo mattutino del 16 Febbraio 2007 si osservano i seguenti astri:

Astro	*Tempo (UTC)*	*Altezza*
Rasalhague	$04^h\ 54^m\ 17^s$	62°01.3'
Antares	$04^h\ 55^m\ 00^s$	43°43.3'
Spica	$04^h\ 56^m\ 20^s$	44° 03.3'
Alkaid	$04^h\ 58^m\ 30^s$	51°09.3'

Sono noti e=12 m, γ_c=0.0, K=+$0^m\ 10^s$, punto stimato all'istante dell'ultima osservazione:

φ=18°47.5' N, λ=163°40.0'W , v=14 nodi, Rv=128°

Determinare la posizione astronomica all'istante dell'ultima osservazione.

Risoluzione

ff) eliminazione dell'ambiguità del cronometro.

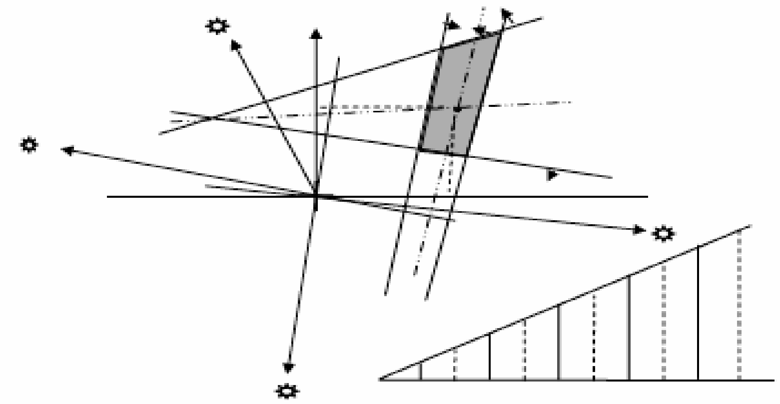
t_m = $05^h\ 23^m$ 16/02/2007
$-\lambda_f$ -=+ 11^h W
T_m = $16^h\ 23^m$ 16/02/2007

gg) Calcolo di Δh e Azimut degli astri osservati:

Rasalahague		*Antares*	
$T_c = 04^h\ 54^m\ 17^s$ $K = +\ 0^m\ 10^s$ $T_m = 16^h\ 54^m\ 27^s$ 16/02/2007		$T_c = 04^h\ 55^m\ 00^s$ $K = +\ 0^m\ 10^s$ $T_m = 16^h\ 55^m\ 10^s$ 16/02/2007	
Dati	**Calcolati**	**Dati**	**Calcolati**
$T_m = 16^h$ $I_m = 54^m\ 27^s$ h_i = 62°01.3' $+\gamma_c$ = 0.0' h_o = 62°01.3' C_1 = 13.9' C_2 = 38.6' h_v = 61° 53.8' h_s = 61° 50.1' Δh = + 3.7'	T_s= 026° 16.0' I_s= 13° 39.0' T_s= 039° 55.0' +Coα= 96° 11.1' T_a= 135° 06.1' +360° T_a= 495° 06.1' $+\lambda_s$ - = 163° 40.0'W t_a= 331° 26.1' δ = 12° 33.0' N φ = 18° 47.5' N h_s = 61° 50.1' A_z = 98.6° Δh = +3.7'	T_m = 16 $I_m = 55^m\ 10^s$ h_i = 43°43.3' $+\gamma_c$ = 0.0' h_o = 43°43.3' C_1 = 13.9' C_2 = 39.2' h_v = 43°30.4' h_s = 43°35.4' Δh = - 5.0'	T_s= 026° 16.0' I_s= 13° 49.8' T_s= 040° 05.8' +Coα= 112° 32.3' T_a= 152° 38.1' + 360° T_a= 512° 38.1' $+\lambda_s$-= 163° 40.0' W t_a = 348° 58.1' δ = 26° 27.0' S φ = 18° 47.5' N h_s = 43° 30.5' A_z = 166.3° Δh = -5.0'

VEGA		*KOCKAB*	
$T_c = 06^h\ 33^m\ 34^s$ $K = 1^m\ 10^s$ $T_m = 06^h\ 34^m\ 44^s$ 13/12/2006		$T_c = 06^h\ 35^m\ 41^s$ $K = 1^m\ 10^s$ $T_m = 06^h\ 36^m\ 51^s$ 13/12/2006	
Dati	Calcolati	Dati	Calcolati
$T_m = 06^h$ $I_m = 34^m\ 44^s$ h_i = 39° 01.3' $+\gamma_c$ =- 2.0' h_o = 38° 59.3' C_1 = 14.4' C_2 = 38.9' h_v = 38°52.6' h_s = 38°56.5' Δh = - 4.9	T_s= 171° 33.0' I_s= 8° 42.4' T_s= 180° 15.4' +Coα= 80° 42.2' T_a= 260° 57.6' $+\lambda_s$+= +167° 15.2' E t_a= 428° 12.8' - 360° 00.0' t_a= 068° 12.8' δ = 38° 47.5' N φ = 40° 50.2' N h_s = 38° 56.5' A_z = 291.5° Δh = -4.9	$T_m = 06^h$ $I_m = 36^m\ 51^s$ h_i = 30°47.3' $+\gamma_c$ =- 2.0' h_o = 30° 45.3' C_1 = 14.4' C_2 = 38.4' h_v = 30°38.1' h_s = 30°34.2' Δh = 3,9	T_s= 171° 33.0' I_s= 9° 14.3' T_s= 180° 57.3' +Coα= 137° 20.3' T_a= 318° 17.6' $+\lambda_s$+ =+167°15.2' E t_a= 485°32.8' - 360° 00.0' t_a= 125°32.8' δ = 74° 07.1' N φ = 40° 50.2' N h_s = 30° 34.2' A_z = 345.0° Δh = 3,9'

Risoluzione con trasporto grafico



Punto astronomico calcolato:

φ_s = 40°50.2' N λ_s = 167°15.2' W
$\Delta\varphi$ = 1.8' N $\Delta\lambda$ = 4.0' E
φ_o = 40° 52.0' N λ_o =167° 11.2' W

Esempio n° 2.

Al crepuscolo mattutino del 2 Febbraio 2007 si osservano i seguenti astri:

Astro	*Tempo (UTC)*	*Altezza*
Alioth	$00^h\ 54^m\ 17^s$	35° 18.4'
Acrux	$00^h\ 55^m\ 30^s$	22° 19.8'
Antares	$00^h\ 56^m\ 20^s$	43°40.4'
Denebola	$00^h\ 57^m\ 10^s$	55°55.4'

Sono noti e=12 m, γ_c=0.0, K=+$0^m\ 10^s$, punto stimato all'istante dell'ultima osservazione:

$$\varphi=02°31.0'\ N,\ \lambda=063°40.0'E\ ,\ v=14\ nodi,\ Rv=128°$$

Determinare la posizione astronomica all'istante dell'ultima osservazione.

Risoluzione

eliminazione dell'ambiguità del cronometro.

t_m = $05^h\ 23^m$ 02/02/2006
$-\lambda_f+$ = - 04^h E
T_m = $01^h\ 23^m$ 02/02/2006

Calcolo di Δh e Azimut degli astri osservati:

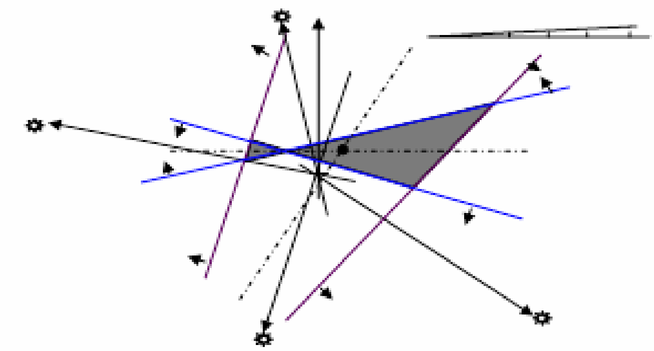
Alioth	
$T_c = 00^h\ 54^m\ 17^s$ $K = +\ 0^m\ 10^s$ $T_{m\,app} = 00^h\ 54^m\ 27^s$ 02/02/2007	
Dati	**Calcolati**
$T_m = 00^h$	T_s= 131° 48.6'
I_m = $54^m\ 27^s$	I_s= 13° 39.0'
	T_s= 145° 27.6'
h_i = 35°18.4'	+Coα= 166° 24.4'
$+\gamma_c$ = 0.0'	T_a= 311° 52.0'
h_o = 35°18.4'	+ λ_s+ =063° 40.0' E
C_1 = 13.9'	t_a= 375° 32.0'
C_2 = 38.5'	- 360° 00.0'
h_v = 35°10.8'	t_a= 015° 32.0'
h_s = 35°09.8'	δ = 55° 54.9' N
Δh = + 1.0'	φ = 02° 31.0' N
	h_s = 35° 09.3'
	A_z = 349.4°
	Δh = +1.0'

Acrux	
$T_c = 00^h\ 55^m\ 30^s$ $K = +\ 0^m\ 10^s$ $T_{m\,app} = 00^h\ 55^m\ 40^s$ 02/02/2007	
Dati	**Calcolati**
$T_m = 00^h$	T_s= 131° 48.6'
I_m = $55^m\ 10^s$	I_s= 13° 49.8'
	T_s= 145° 37.7'
h_i = 22°19.8'	+Coα= 173° 14.9'
$+\gamma_c$ = 0.0'	T_a= 318° 52.6'
h_o = 22°19.8'	+ λ_s+= 63° 40.0' E
C_1 = 13.9'	t_a = 382° 32.6'
C_2 = 37.7'	-360° 00.0'
h_v = 22°11.4'	t_a = 022° 32.6'
h_s = 22°11.8'	δ = 63° 08.1' S
Δh = - 0.4'	φ = 02° 31.0' N
	h_s = 22° 11.8'
	A_z = 190.8°
	Δh = -0.4'

Antares	
$T_c = 00^h\ 56^m\ 20^s$ $K = +\ 0^m\ 10^s$ $T_m = 00^h\ 56^m\ 30^s$ 02/02/2007	
Dati	**Dati**
$T_m = 00^h$	T_s= 131° 48.6'
I_m = $56^m\ 30^s$	I_s= 14° 09.8'
	T_s= 145° 58.4'
h_i = 43° 40.4'	+Coα= 112° 32.5'
$+\gamma_c$ = + 0.0'	T_a= 258° 30.9'
h_o = 43°40.4'	+ λ_s+= 063° 40.0' E
C_1 = 13.9'	t_a= 322° 10.9'
C_2 = 39.0'	δ = 26° 26.9' S
h_v = 43°33.3	φ = 02° 31.0' N
h_s = 43°30.6'	h_s = 43°30.6'
Δh = + 2.7'	A_z = 131.0°
	Δh = +2.7'

Denebola	
$T_c = 00^h\ 57^m\ 10^s$ $K = +\ 0^m\ 10^s$ $T_m = 00^h\ 57^m\ 20^s$ 02/02/2007	
Calcolati	**Dati**
$T_m = 00^h$	T_s= 131° 48.6'
I_m = $57^m\ 20^s$	I_s= 14° 22.4'
	T_s= 146° 11.0'
h_i = 55° 55.4'	+Coα= 182°38.3'
$+\gamma_c$ = + 0.0'	T_a= 328° 49.3'
h_o = 55° 55.4'	+ λ_s+= 063° 40.0' E
C_1 = 13.9'	t_a= 392° 29.3'
C_2 = 39.3'	- 360° 00.0'
h_v = 55°48.6	t_a= 032° 29.3'
h_s = 55° 46.7'	δ = 14° 31.8'N
Δh = + 1.9'	φ = 02° 31.0'N
	h_s = 55° 46.7'
	A_z = 292.4°
	Δh = +1.9'

Risoluzione con trasporto grafico



Punto astronomico calcolato:

φ_s = 02°31.0' N λ_s = 063°40.0' E
Δφ = 0.8' N Δλ = 0.7' E
φ_o = 02° 31.8' N λ_o = 063°40.7' E

Esempio n° 3

Al crepuscolo serale del 10 Novembre 2007 nel Pacifico settentrionale,si osservano i seguenti astri:

Astro	*Tempo (UTC)*	*Altezza*
Hamal	$06^h\ 30^m\ 10^s$	24°10.9'
Markab	$06^h\ 32^m\ 20^s$	52°45.8'
Vega	$06^h\ 33^m\ 04^s$	70° 32.9'
Kockab	$06^h\ 35^m\ 41^s$	37°30.3'

Sono noti e=10m, γ_c= 2.0, K=-$1^m\ 10^s$, punto stimato all'istante dell'ultima osservazione:

φ=39°50.2' N, λ=167°15.2'E, v=15 nodi, Rv=240°

Determinare la posizione astronomica all'istante dell'ultima osservazione.

Risoluzione

eliminazione dell'ambiguità del cronometro.

t_m = $17^h\ 30^m$ 10/11/2007
$-\lambda_E += -\ 11^h$ E
$T_{m\ app}$ = $06^h\ 30^m$ 10/11/2007

Calcolo di Δh e Azimut degli astri osservati:

HAMAL

$T_c = 06^h\ 30^m\ 10^m$
$K = -\ 1^m\ 10^s$
$T_m = 06^h\ 29^m\ 00^s$ 10/11/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 06^h$	T_s= 139° 01.4'
I_m = $29^m\ 00^s$	I_s= 7° 16.2'
	T_s= 146° 17.6'
h_i = 24°10.9'	+Coα= 328° 05.3'
$+\gamma_c$ = 2.0'	T_s= 474° 22.9'
h_o = 24°12.6'	+ λ_s += 167° 15.2' E
C_1 = 14.4'	t_s= 641° 37.1'
C_2 = 37.9'	- 360° 00.0'
h_v = 24°05.2'	t_s= 281° 37.1'
h_s = 24°02.6'	δ = 23° 24.6' N
Δh = + 2.6'	φ = 39° 50.2' N
	h_s = 24°02.6'
	A_z = 78.7°
	Δh = + 2.6'

MARKAB

$T_c = 06^h\ 32^m\ 10^m$
$K = -\ 1^m\ 10^s$
$T_m = 06^h\ 31^m\ 00^s$ 10/11/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 06^h$	T_s= 139° 01.4'
I_m = $31^m\ 00^s$	I_s = 7° 46.3'
	T_s= 146° 47.7'
h_i = 52°45.8'	+Coα= 13° 42.5'
$+\gamma_c$ = 2.0'	T_s= 160° 30.2'
h_o = 52°47.8'	+ λ_s += 167° 15.0' E
C_1 = 14.4'	t_s = 327° 45.2'
C_2 = 39.3'	δ = 15° 13.0' N
h_v = 52° 41.5'	φ = 39° 50.2' N
h_s = 52° 39.7'	h_s = 52° 39.7'
Δh = + 1.8'	
	A_z = 121.9°
	Δh = +1.8'

VEGA

$T_c = 06^h\ 33^m\ 04^m$
$K = -\ 1^m\ 10^s$
$T_m = 06^h$ 31 54^s 10/11/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 06^h$	T_s= 139° 01.4'
I_m = 31 54^s	I_s= 8° 14.9'
	T_s= 147° 16.3'
h_i = 70° 32.9'	+Coα= 80° 42.2'
$+\gamma_c$ = 2.0'	T_s= 227° 58.5'
h_o = 70° 34.9'	+ λ_{s+} = 167° 15.2' E
C_1 = 14.4'	t_s = 385° 13 7'
C_2 = 39.7'	- 360° 00.0'
h_v = 70° 29.0'	t_s = 25° 13.7'
h_s = 70° 31.1'	δ = 38° 47.6' N
Δh = - 2.1'	φ = 39° 50.2' N
	h_s = 70° 31.1'
	A_z = 275.1°
	Δh = -2.1'

KOCKAB

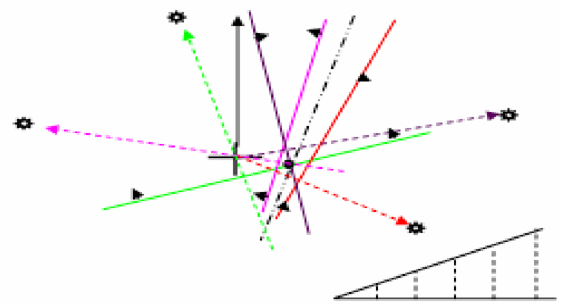
$T_c = 06^h\ 35^m\ 41^m$
$K = -\ 1^m\ 10^s$
$T_m = 06^h\ 34^m\ 31^s$ 10/11/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 06^h$	T_s= 139° 01.4'
I_m = $34^m\ 31^s$	I_s = 8° 39.2'
	T_s= 147° 40.2'
h_i = 37°30.3'	+Coα=137° 20.5'
$+\gamma_c$ = 2.0'	T_s= 285° 00.7'
h_o = 37°35.3'	+ λ_{s+} = 167° 15.2' E
C_1 = 14.4'	t_s = 452° 15.9'
C_2 = 38.4'	- 360°
h_v = 37° 25.1'	t_s = 092°15.9'
h_s = 37° 26.1'	δ = 74° 07.3' N
Δh = -1.0'	φ = 39° 50.2' N
	h_s = 37° 26.1'
	A_z = 339.9°
	Δh = -1.0'

Trasporto

$$\Delta h_T = m\cos(Rv - Az) \quad , \quad \Delta h = \Delta h_m + \Delta h_T$$

Astro	**Dt**	**m**	**Rv**	**Az**	Δh_m	Δh_T	Δh
Hanal	$5^m\ 31^s$	1.4	240	**79**	2.6'	-1.2'	**1.4'**
Markab	$3^m\ 21^s$	0.8	240	**122**	1.8'	0.3'	**2.1'**
Vega	$2^m\ 40^s$	0.7	240	**275**	-2.1'	0.4'	**-1.7'**
Kockab	-----	-----	240	**340**	-1.0'	----	**-1.0'**



Punto astronomico calcolato:

φ_s = 39°50.2' N λ_s = 167°15.2' E
$\Delta\varphi$ = 0.4' S $\Delta\lambda$ = 1.5' E
φ_o = 39° 49.8' N λ_o =167°16.7' E

Esempio n° 4.

Al crepuscolo mattutino del 5 Marzo 2007 nel mar Tirreno si osservano i seguenti astri:

Astro	*Tempo (UTC)*	*Altezza*
Luna	$04^h\ 20^m\ 00^s$	17°50.3'
Giove	$04^h\ 22^m\ 20^s$	25° 10.2'
Polare	$04^h\ 23^m\ 04^s$	40° 45.5'
Vega	$04^h\ 25^m\ 41^s$	62° 42.6'

Sono noti e=15m, γ_c=+1.5, K=$4^m\ 30^s$, punto stimato all'istante dell'ultima osservazione:

$$\varphi=41°20.2'\ N,\ \lambda=13°20.2'E\ ,\ v=18\ nodi,\ Rv=210°$$

Determinare la posizione astronomica all'istante dell'ultima osservazione.

Risoluzione

eliminazione dell'ambiguità del cronometro.

t_m= $05^h\ 20^m$ 5/03/2007
$-\lambda_f$ += -1^h E
T_m = $04^h\ 20^m$ 5/03/2007

Calcolo di Δh e Azimut degli astri osservati:

Luna

$T_c = 04^h\ 20^m\ 00^m$
$K = +\ 4^m\ 30^s$
$T_m = 04^h\ 24^m\ 30^s$ 5/03/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 04^h$	$T_☾$= 045° 24.1'
I_m = $24^m\ 30^s$	$I_☾$= 05° 50.8'
	pp= 7.0'
$h_{i☾}$ = 17°50.3'	$T_☾$= 51° 21.9'
$+\gamma_c$ = + 1.5'	$+\lambda_s$+= + 013° 20.2' E
h_o = 17° 51.8'	$t_☾$= 064° 42.1'
C_1 = 13.1'	δ = 00° 07.8' N
C_2 = 70.4'	pp = - 5.8'
C_3 = 32.4'	δ = 00° 02.0' N
h_v = 18° 47.7'	φ = 41° 20.2' N
h_s = 18° 44.3'	h_s = 18°44,3'
Δh = + 3.3'	A_z = 252.7°
	Δh = +3.3

Giove

$T_c = 04^h\ 22^m\ 20^m$
$K = +\ 4^m\ 30^s$
$T_m = 04^h\ 26^m\ 50^s$ 5/03/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 04^h$	$T_\bullet$= 325° 15.0'
I_m = $26^m\ 50^s$	$I_\bullet$= 06° 42.5'
	$T_\bullet$= 331° 57.5'
h_i = 25° 10.2'	$+\lambda_s$+ =+013° 20.2' E
$+\gamma_c$ = + 1.5'	$t_\bullet$= 345° 17.7
h_o = 25° 11.7'	δ = 22° 12.6' S
C_1 = 13.1'	φ = 41° 20.2' N
C_2 = 38.5'	h_s = 25° 00.3'
h_v = 25° 03.3'	A_z = 165.0°
h_s = 25° 00.3'	Δh = +3.0
Δh = + 3.0'	

Polare

$T_c = 04^h\ 23^m\ 04^m$
$K = +\ 4^m\ 30^s$
$T_m = 04^h\ 27^m\ 34^s$ 05/03/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 04^h$	T_s= 222° 31.8'
I_m = $27^m\ 34^s$	I_s= 06° 54.2'
	T_s= 229° 26.0'
h_i = 40° 45.5'	+Coα= 320° 19.3'
$+\gamma_c$ =+ 1.5'	T_a= 549° 45.3'
h_o = 40° 47.0'	$+\lambda_s$+ =+013° 20.2' E
C_1 = 13.1'	t_a= 563° 05.5'
C_2 = 38.9'	- 360
h_v = 40° 39.0'	t_a= 203° 05.5'
h_s = 40° 41.6'	δ = 89° 18.1' N
Δh = - 2.6'	φ = 41° 20.2' N
	h_s = 40° 41.6'
	A_z = 0.3°
	Δh = -2.6'

Vega

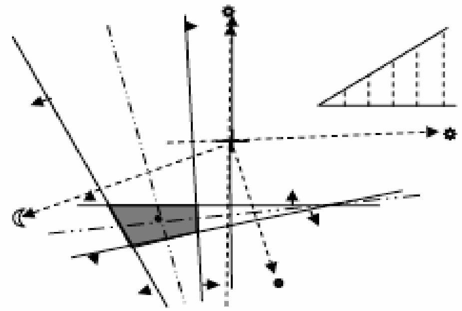
$T_c = 04^h\ 25^m\ 41^m$
$K = +\ 4^m\ 30^s$
$T_m = 04^h\ 30^m\ 11^s$ 05/03/2007

Dati	Calcolati
$T_m = 04^h$	T_s= 222° 31.8'
I_m = $30^m\ 11^s$	I_s= 07° 34.0'
	T_s= 230° 05.8'
h_i = 62° 42.6'	+Coα= 080° 42.4'
$+\gamma_c$ = 1.5'	T_s= 310° 48.2'
h_o = 62° 44.1'	$+\lambda_s$+ = 013° 20.2' E
C_1 = 13.1'	t_a= 324° 08.4'
C_2 = 39.5'	δ = 38°47.0' N
h_v = 62° 36.7'	φ = 41° 20.2' N
h_s = 62° 37.9'	h_s = 62° 37.9'
Δh = - 1.2'	A_z = 83.4°
	Δh = -1.2

Trasporto:

$$\Delta h_T = m\cos(Rv - Az) \quad , \quad \Delta h = \Delta h_m + \Delta h_T$$

Astro	Dt	m	Rv	Az	Δh_m	Δh_T	Δh
Luna	$5^m\ 31^s$	1.7	210°	**253°**	3.3'	1.2	**4.5'**
Giove	$3^m\ 21^s$	1.0	210°	**165°**	3.0'	0.7	**3.7'**
Polare	$2^m\ 37^s$	0.8	210°	**0°**	-2.6'	-0.7	**-3.3'**
Vega	-----	-----	210°	**83°**	-1.2'	----	**-1.2'**

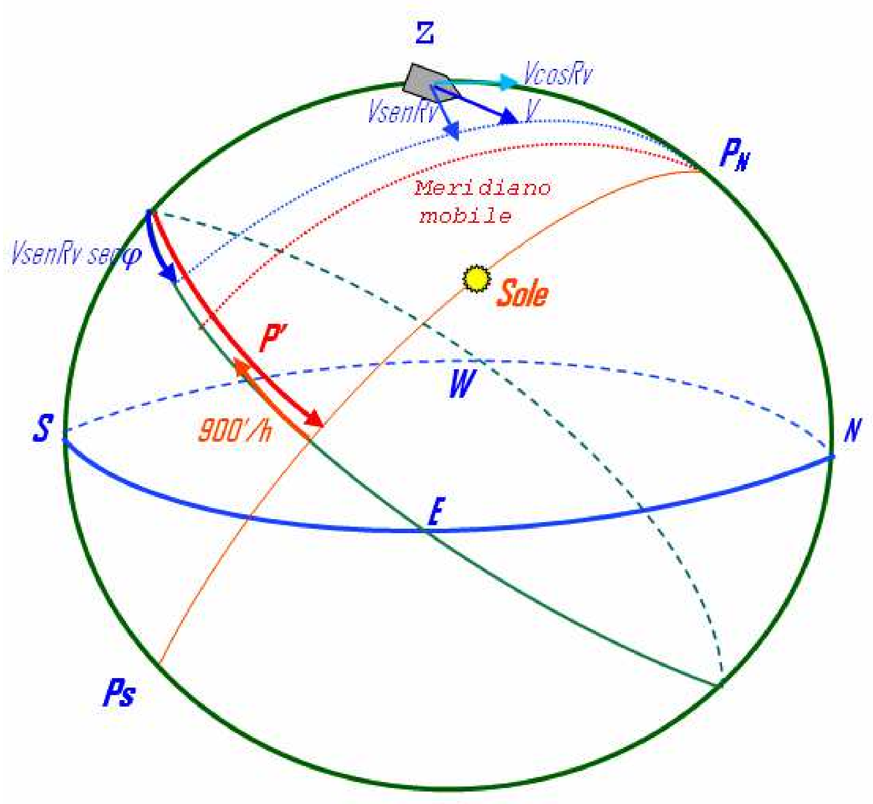


Punto astronomico calcolato:

φ_s = 41°20.2' N λ_s = 013°20.2' E
Δφ = 3.5' S   Δλ = 3.0' W
φ_o = 41°16.7' S λ_o = 013°17.2' E

PUNTO NAVE CON RETTE DEL SOLE. Passaggio del Sole al meridiano superiore mobile di un osservatore in moto.

E' il punto nave classico di *mezzogiorno,* determinato generalmente con due osservazioni. Le coordinate di tale punto vengono poi trascritte nel *giornale di navigazione.*
Nelle zone intorno alle latitudini medie, la prima osservazione viene effettuata tra le 09^h30^m e le 10^h00^m; la seconda osservazione, di norma, a mezzodì quando il Sole transita al meridiano mobile della nave.



Se Rv è la rotta della nave e V la sua velocità, lo Zenit dell'osservatore, posto sulla nave, si sposta con la stessa Rotta e Velocità. Scomponendo tale velocità nelle due componenti per meridiano e per parallelo (la Terra si suppone piana, in quel tratto) si avranno:

$V \cdot \cos R_v$ componente per meridiano
$V \cdot sen\, R_v$ componente per parallelo

L'arco di equatore, corrispondente a $V sen\, R_V$ sarà:

$$V \cdot sen\, R_v \cdot sec\, \varphi$$

E rappresenta la velocità con cui lo Zenit si muove lungo l'equatore.
E' noto che la Terra compie un giro di 360° in 24 ore sideree e quindi ruota 15° = 900' in 1 ora siderea (in 1 ora media di 902',5). Assumendo, con un pè di approssimazione, la velocità angolare di 900' valida per 1 ora media, la proiezione del Sole sull'Equatore si sposterà verso il meridiano dell'osservatore con velocità di 900', mentre lo Zenit si muove, lungo l'Equatore, verso l'Astro, con velocità $V \cdot sen\, R_v \cdot sec\, \varphi$.

Se P è l'angolo al polo, sarà P' (angolo al polo espresso in primi e decimali) la distanza che separa il meridiano dell'osservatore (che si sposta con lo Zenit) dall'orario del Sole che si avvicina alla velocità di 900'. L'intervallo di tempo dopo il quale il Sole si troverà sul meridiano dell'osservatore è dato da:

$$\Delta t = \frac{P'}{900' + V sen Rv \sec\varphi}$$

Se l'osservatore, anziché avvicinarsi all'astro *(Rotta: quadranti Orientali),* se ne allontana *(Rotta: quadranti Occidentali),* la formula diventa:

$$\Delta t = \frac{P'}{900' - V sen Rv \sec\varphi}$$

La formula è ancora approssimata perché non tiene conto del moto proprio del Sole, sulla sfera celeste, nell'intervallo considerato.
La formula può essere applicata per il passaggio di una stella e, con più grossolana approssimazione, per i pianeti o la Luna.

L'ora di Greenwich corrispondente al passaggio dell'astro al meridiano mobile, sarà data da:

$$T'm_{pms} = Tm \pm \Delta t$$

(+) se *Rv* è compresa nei *quadranti Orientali* ; *(–)* se *Rv* è compresa nei *quadranti Occidentali.*

Il calcolo degli elementi della retta del Sole in meridiano si semplifica:

$$z_s = \varphi_s - \delta_\Theta\,; \quad h_s = 90° - /\, z_s\, /$$

$a_s = 180°$ se z_s è positivo; $a_s = 0°$ se z_s è negativo

Poiché le due osservazioni sono intervallate bisogna operare il trasporto della prima retta all'istante della seconda retta *(meridiana).* Il grafico per determinare il Punto Nave viene eseguito con il metodo del *trasporto analitico,* nel senso che ogni retta viene calcolata con il *proprio punto stimato,* e il tracciamento viene effettuato rispetto alla posizione stimata del passaggio al meridiano mobile della nave.

Esempio

Da una nave in navigazione nell'Oceano Pacifico, con Rv = 135°, V_p = 20 nodi, il mattino del 22 giugno 2007 verso le ore locali 09^h3o^m, dal Punto stimato (φ = 28°22' S ; λ = 165°37' E) si osserva il Sole:

Tc = $10^h31^m12^s$ $\quad$ $hi_{\odot}$= 27°03'.7

Al transito del Sole al meridiano mobile, si osserva nuovamente il Sole ottenendo:

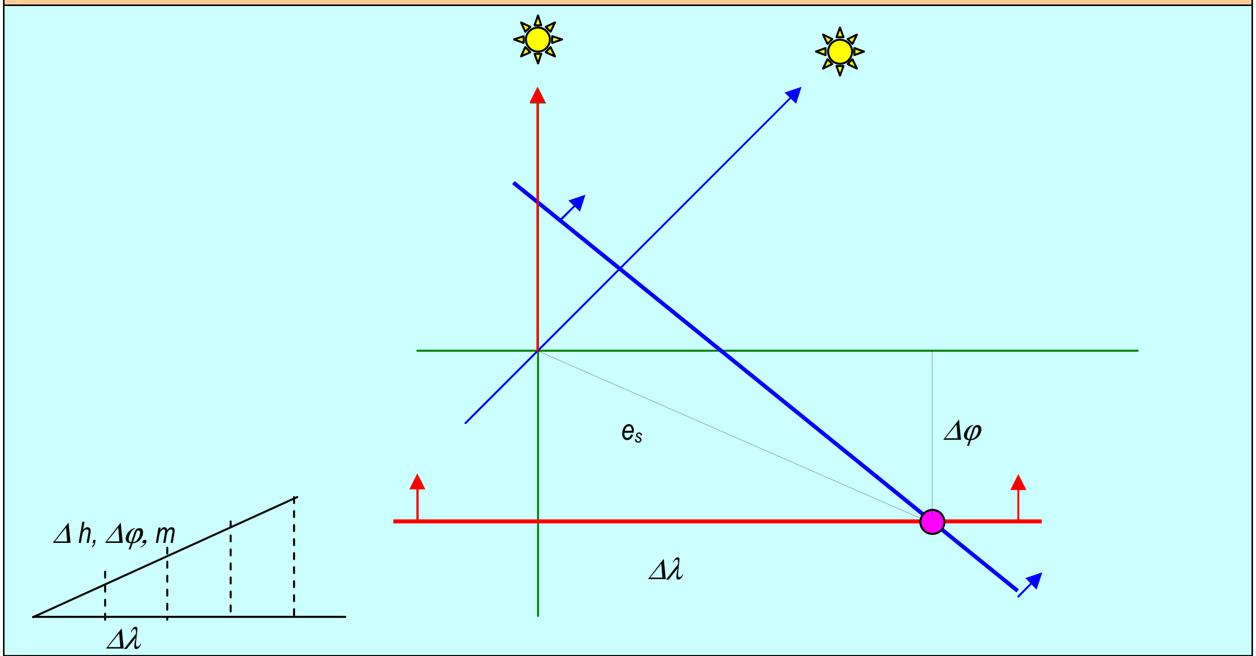
$hi_{\odot}$ = 37°26'.2

Sono noti: $K = + 0^m 29^s$; $e = 12$ m ; $\gamma_c = - 0'.5$.
Determinare il P_n di mezzodì vero, il t_m e il t_f corrispondente.

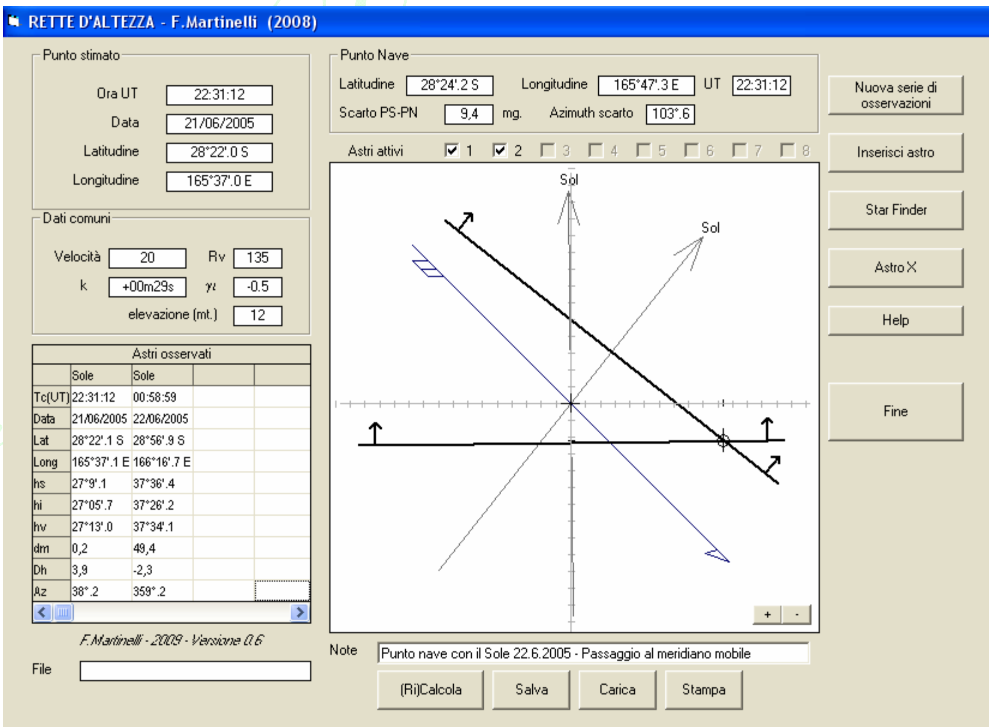
Sole - 1^ osservazione			
Calcolo preliminare $tm = 9^h 30^m$ 22/6 $-\lambda = - 11^h 02^m$ E $Tm_{ap} = 22^h 28^m$ 21/6	$Tc = 22^h 31^m 12^s$ 22/6 $+ K = + 00^h 00^m 29^s$ E $Tm = 22^h 31^m 41^s$ 21/6	$T'v = 149° 32'.0$ $Iv = 7° 55'.3$ $pp = - 0'.1$ $Tv = 157° 27'.2$ $+\lambda = 165° 37'.0$ $tv = 323° 04'.2$ $P_\odot = 36° 55'.8$ E	$\delta_\odot = 23° 26'.4$ N $pp = + 0'.0$ $\delta_\odot = 23° 26'.4$ N
Calcolo di : hv , hs , Zs			**Elementi determinativi**
$hi_\odot = 27°03'.7$ $+ \gamma_c = - 0'.5$ $ho = 27°03'.2$ $+ C_1 = 13'.9$ $+ C_2 = 14'.2$ $+ C_3 = 39'.8$ $hv+1° = 28°11'.1$ $hv = 27°11'.1$	$sen\ h_s = sen\varphi_s \cdot sen\ \delta + cos\varphi_s \cdot cos\delta \cdot cos\ P$ $hs = 27° 09'.1$ $\cot Z_s = \frac{\cos\varphi_s \cdot \tan\delta}{senP} - \frac{sen\ \varphi_s}{\tan P}$ $Z_s = S\ 149° 43'.8\ E$		$hv = 27° 11'.1$ $- hs = 27° 09'.1$ $\Delta h = + 2'.0$ $a_s = 38° 16'.2$

Sole - 2^ osservazione (meridiano superiore mobile)			
$\Delta t = \frac{P'}{900' + V sen Rv \sec\varphi}$ $\Delta t = 2^h,45$ $\Delta t = 2^h 27^m 18^s$	$Tm = 22^h 31^m 41^s$ 21/6 $+ \Delta t = 02^h 27^m 18^s$ $T'm = 00^h 58^m 59^s$ 22/6 $m = V\ \Delta t$ $m = 49,1$ mg.	$\delta_\odot = 23° 26'.3$ N $pp = + 0'.0$ $\delta_\odot = 23° 26'.3$ N	$\Delta\varphi = m \cos Rv$ $\Delta\varphi = 34'.7$ S $\Delta\lambda = m\ sen\ Rv \sec\varphi_m$ $\Delta\lambda = 39'.6$ E
Calcolo di : hv , hs , as - Punto stimato a mezzodì vero di bordo			**Elementi determinativi**
$hi_\odot = 37°26'.2$ $+ \gamma_c = - 0'.5$ $ho = 37°25'.7$ $+ C_1 = 13'.9$ $+ C_2 = 14'.8$ $+ C_3 = 39'.8$ $hv+1° = 38°34'.2$ $hv = 37°34'.2$	$\varphi_s = 28° 22'.0$ S $+\Delta\varphi = 34'.7$ S $\varphi'_s = 28° 56'.7$ S $\lambda_s = 165° 37'.0$ E $+\Delta\lambda = 39'.6$ E $\lambda'_s = 166° 16'.6$ E	$\varphi_s = 28° 56'.7$ S (-) $- \delta_\odot = 23°26'.3$ N (-) $z_s = 52° 23'.0$ (-) $89° 60'.0$ $hs = 37° 37'.0$	$a_s = 38° 16'.2$ $hv = 37° 34'.2$ $- hs = 37° 37'.0$ $\Delta h = - 2'.8$

Grafico			



Coordinate del Punto Nave			Errore di stima
φ'_s = 28° 56'.7 S $+\Delta\varphi$ = 2'.8 S φ'_n = 28° 59'.5 S	λ_s = 166° 16'.6 E $+\Delta\lambda$ = 7'.9 E λ'_n = 166° 24'.5 E	T'm = $00^h\,58^m\,59^s$ 22/6 + λ'_f = 11^h E tf = $11^h 58^m 59^s$ 22/6	*e_S: errore di stima* *Ril_v: 115°* *d: 7.4 mg*



Calcoli effettuati con software realizzato da F. MARTINELLI (ITN - Viareggio). Il grafico è rispetto al I° Punto stimato.

LA PRECISIONE NELLA DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE

Terminologia e classificazione degli errori

Ciascuna grandezza di un determinato sistema ha un certo valore *(valore vero),* di solito *ignoto.* Scopo di una misura è quello di ottenere un valore che rappresenti una *stima,* quanto più possibile fedele, del valore vero.
L'*esattezza* nella determinazione della posizione della nave dipende dalla precisione delle misure, ossia dagli errori che si commettono (per vari motivi) nelle misurazioni stesse.

- *Errore.* Un *errore* nella misura è la differenza tra il *valore misurato* e il *valore vero* della grandezza, caratterizzato dall'*entità* e dal *segno*:

$$e = valore_{\ misurato} - valore_{\ vero}$$

- *Correzione.* In certi casi è utile usare la *correzione,* che è il contrario dell'errore:

$$c = valore_{\ vero} - valore_{\ misurato}$$

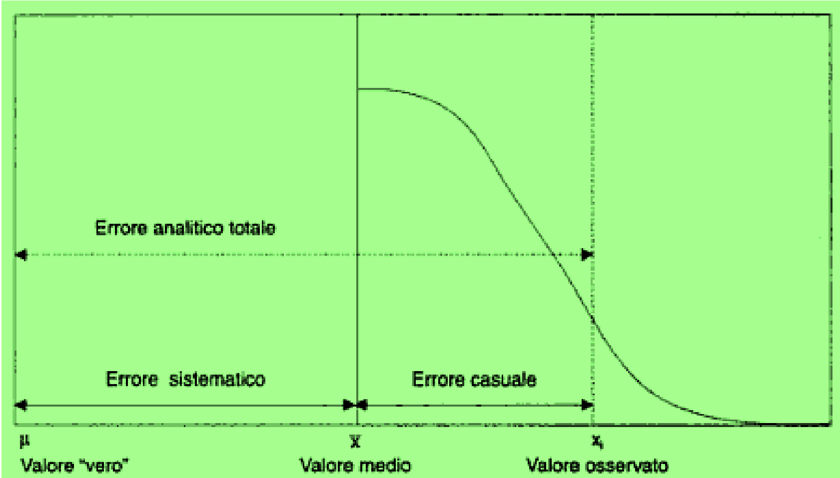
$$c = -\ e$$

- *Attendibilità. (Reliability, performance),* è la qualità che caratterizza, in senso globale, un risultato (o un metodo) analitico. Svariati fattori concorrono a determinarla, fra cui la *precisione, l'accuratezza, la sensibilità.*

- *Precisione.* La precisione viene definita come la *concordanza* fra i risultati di una serie di misure ottenute con lo stesso metodo su uno stesso campione. E' il grado di *approssimazione* di un *valore misurato*, espresso nelle varie unità di misura (gradi, primi, metri, miglia, ecc.). La precisione dipende da diverse *cause esterne* o *interne* (rifrazione, sistema impiegato, strumentazione impiegata) e, a sua volta, influisce sulla *"precisione nella determinazione della posizione"* che si esprime in *metri* o in *miglia.*
Nei sistemi di *radio-posizionamento* la precisione dipende da:

- misure di differenza di tempo e di fase
- velocità di propagazione *"c" (velocità della luce)*
- numero delle misurazioni
- numero dei *LOP* (*Lane Of Position:* luogo di posizione) e loro intersezione geometrica.

La *precisione* è in rapporto con l'*errore casuale.*



Definizione di imprecisione e accuratezza in termini di errori casuale, sistematico ed errore analitico totale

- *Accuracy.* Molto spesso la *precisione* è espressa come *accuracy (accuratezza)* che è un numero che fornisce la *probabilità percentuale* che le misurazioni abbiano un *errore* inferiore ad un certo valore convenzionale. L'*accuratezza* viene definita dal grado di *concordanza* fra il *valore medio* trovato e il *valore vero,* o *più probabile,* conosciuto; il valore vero rappresenta un concetto *astratto,* e si utilizza per la misura dell'accuratezza, il valore più probabile ottenibile con metodi differenti.

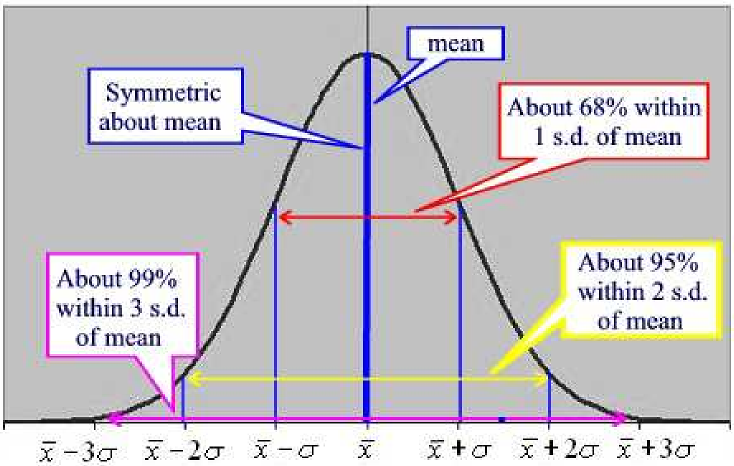
- *Ripetibilità.* Si definisce *ripetibilità (reapeatibility),* la capacità del sistema di fornire le medesime informazioni in corrispondenza della medesima posizione dell'utente.

- *Prevedibilità.* Si definisce *prevedibilità (predictability),* la capacità del sistema di fornire le informazioni in coordinate geografiche. La prevedibilità è legata alla conoscenza di *"c"* e può essere precalcolata e costituire *correzioni* costanti da introdurre.

- *Errori grossolani. Faults (guasti)*, difetti dello strumento o malfunzionamento improvviso - *Blunder (abbaglio),* sono quegli errori dovuti alla *negligenza* o scarsa *preparazione* dell'operatore e, come tali, sono facilmente evitabili, semplicemente con maggiore attenzione. Gli errori grossolani sono veri e propri *"sbagli".*

- *Errori sistematici.* Sono quegli errori che seguono una determinata legge, hanno una grandezza e un segno, possono essere previsti e quindi anche corretti, sono chiamai anche *errori costanti.* Gli *errori sistematici* sono quelli che compaiono in ogni singola misura e sono dovuti all'impiego di strumenti *poco precisi, mal tarati, o inadatti* alla misura in questione. Di questo tipo di errori fanno parte anche quelli dovuti all'*imperizia* o alla *negligenza* dell'operatore.
Si tratta di errori che possono essere eliminati, perché o è nota la causa che li ha determinati o può essere individuata.

- *Errori accidentali (casuali o normali).* Sono quegli errori casuali *(random),* non prevedibili e di entità variabile. Essi sono dovuti sia allo stato *psicofisico* dell'operatore, sia alla inevitabile e imprevedibile imprecisione degli strumenti usati. Questi errori possono anche essere dovuti alla variazione casuale e di breve durata di *fattori esterni.*
Sono per principio inevitabili e sempre presenti quando si esegue una misura; sono generalmente di piccola entità e vengono compiuti senza che l'operatore se ne possa rendere conto.



Curva di distribuzione Gaussiana, con indicazione dell'aria sottesa da: ±1σ, ±2σ, ±3σ.

La distribuzione degli errori casuali può essere rappresentata graficamente mediante un diagramma, ponendo sull'asse orizzontale i diversi valori ottenuti delle misure e sull'asse verticale le frequenze (cioè il numero delle volte delle misure. Si delineerà una curva a *forma di campana* chiamata *curva di Gauss* (o di frequenza).

Il valore di *σ* o *D.S. (Deviazione Standard),* cioè quella quantità che esprime la misura della *dispersione* dei valori delle misure rispetto al *valore vero* X_o. Considerando che l'area totale racchiusa dalla curva esprime tutti i valori ottenuti, l'area compresa fra *-1σ e + 1σ* rappresenta il *68%* circa dei valori, l'area compresa fra *- 2σ e + 2σ* rappresenta il *95 %* circa dei valori e l'area compresa fra *- 3σ e + 3σ* rappresenta il *99 %* circa dei valori.

La *Deviazione Standard σ* viene calcolata mediante la formula seguente:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum (x - X_o)^2}{n}}$$

in cui x rappresenta l'entità della misura ed n il numero delle misure.

Quando non si conosce il *valore vero* della misura X_o , la valutazione viene effettuata con il *R.M.S. (Root Mean Square = Scarto Quadratico Medio),* utilizzando gli scarti *s* rispetto al *valore medio* $\bar{X}$ delle misure:

$$RMS = \pm\sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{(n-1)}}$$

Fra i due tipi di errori, *quelli sistematici e quelli accidentali,* vi è una notevole differenza. Agli *errori sistematici* è associato il concetto di *accuratezza*, mentre agli *errori accidentali* è associato quello di *precisione*. Si dirà allora che una misura è *accurata* quando non è affetta da *errori sistematici.* Diremo invece che una misura è *precisa* quando non è affetta da *errori accidentali*. Da quanto abbiamo detto si deduce, quindi, che una misura potrebbe essere *precisa,* ma *non accurata.*

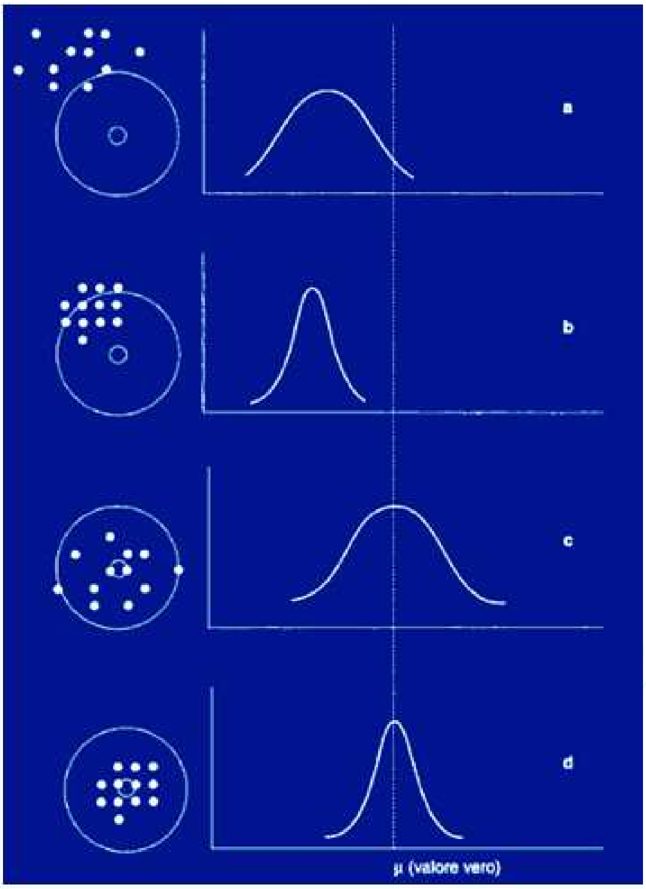


Diagramma a bersaglio: rappresentazione grafica del concetto di precisione e di accuratezza
a : non preciso e non accurato ; b : preciso, non accurato ; c : non preciso, accurato ; d : preciso, accurato.

- *Scarto.* Si ottiene eseguendo la differenza tra il valore misurato e il valore medio di una serie di misure:

$$s = valore_{\,misurato} - valore_{\,medio}$$

ossia: $$s = x_i - \overline{X} \; .$$

La valutazione della dispersione delle misure attorno al *valore medio* $\overline{X}$ non può essere effettuata calcolando la *media degli scarti* (o degli errori), dato che il valore ottenuto equivarrebbe *a zero*, infatti:

$$\overline{s} = \frac{\sum (x - \overline{X})}{n}$$

$$\overline{s} = \frac{(x_1 - \overline{X} + x_2 - \overline{X} + \ldots\ldots + x_n - \overline{X})}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots. + x_n - n \cdot \overline{X})}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots. + n_2}{n} - \frac{n \cdot \overline{X}}{n} = \overline{X} - \overline{X} = 0$$

Per superare la difficoltà, legata al fatto che gli scarti possano essere alternativamente positivi e negativi, si considera il loro quadrato per poi calcolarne la radice quadrata. In tal modo si definisce la *Deviazione Standard* σ , come prima descritto, o come spesso lo *Scarto Quadratico Medio, R.M.S.*

- *Varianza.* E' il quadrato della *Deviazione Standard*, σ^2 .

Quando sussistono errori qualsiasi di diverso tipo, il σ da considerare è la *radice quadrata della somma delle diverse varienze.* $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}$.

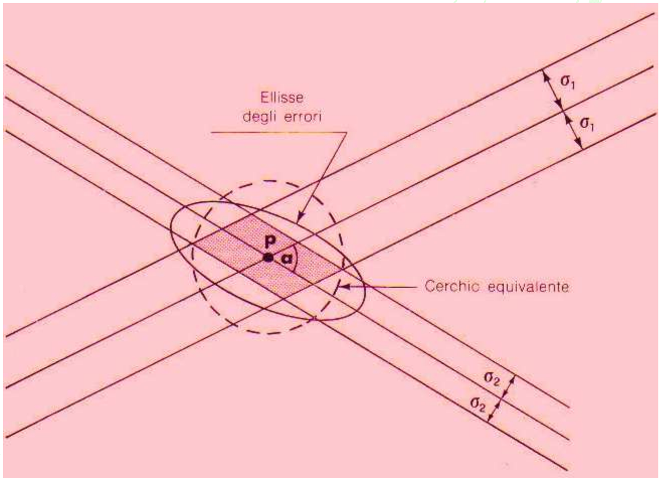
- *Errore probabile. (Probable),* corrisponde al *50 %* degli errori ed ha il valore di $\pm \frac{2}{3}\sigma$.

- *Cerchio equivalente. (equivalent probability circle)* – Quando una posizione è determinata da 2 LOP che hanno due *RMS* anche diversi fra loro e una intersezione angolare α , l'area di distribuzione degli errori, detta *"area di incertezza",* assume la forma di un ellisse e, per semplicità si considera un cerchio il cui *raggio* è r:

$$r = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{sen\alpha}$$

Nel cui interno sono comprese il *68,27 %* delle posizioni determinate.

- *Errore circolare probabile. (C.E.P.: Circular Errore Probable)* – E' il *raggio equivalente del cerchio* in cui si considerano comprese il *50 %* delle posizioni determinate. Approssimativamente ha il valore di $1{,}2 \cdot \sigma$.



Area di incertezza e Cerchio Equivalente

Con due LOP, la probabilità che il *Punto Nave* cada all'interno del parallelogramma è del *46,6 %* $(\pm\sigma^2 = 68.27^2 = 4660 = 46{,}6\ \%)$.
Il *parallelogramma* non è il luogo geometrico dei punti in cui la probabilità è *costante.* Si dimostra che i punti appartenenti all'*Ellisse inscritta* nel parallelogramma hanno uguale probabilità di contenere il Punto nave del *39,4 %* .

- *Affidabilità. (Reliability)* – Attualmente anche in campo commerciale vengono presi in considerazione per le strumentazioni elettroniche due valori che ne danno il grado di *affidabilità;* essi sono: *MTBF (Mean Time Between Failures),* cioè la media del tempo in ore fra due avarie successive che compromettano l'impiego della strumentazione; *MTTR (Mean Time To Repair),* cioè la media del tempo in ore per rimettere in efficienza la strumentazione o un suo componente.
I due suddetti valori possono essere utilizzati per prevedere, relativamente alla durata del viaggio, quale può essere la probabilità di avarie alle apparecchiature pianificando i *"rispetti"* (pezzi di ricambio).

Applicazioni pratiche

Si riporta di seguito una applicazione pratica di quanto detto. Le misurazioni effettuate hanno i seguenti errori:

+ 3 ; + 8 ; + 6 ; - 4 ; - 2 ; - 4 ; + 2 ; + 3 ; - 1 ; + 2

Numero delle misurazioni: N = 10 . Campo di validità: + 8 ; - 4 ; Media : $\overline{X}$ *= + 1.3 ; RMS = 4 ; DS =* σ *= ± 3.82*

- *Media :* $\overline{X} = \dfrac{+3+8+6-4-2-4+2+3-1+2}{10} = +1.3$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-1.3)^2+(8-1,3)^2+(6-1.3)^2+(-4-1.3)^2+(-2-1.3)^2+(-4-1.3)^2+(2-1.3)^2+(3-1.3)^2+(-1-1.3)^2+(2-1.3)^2}{10}}$$

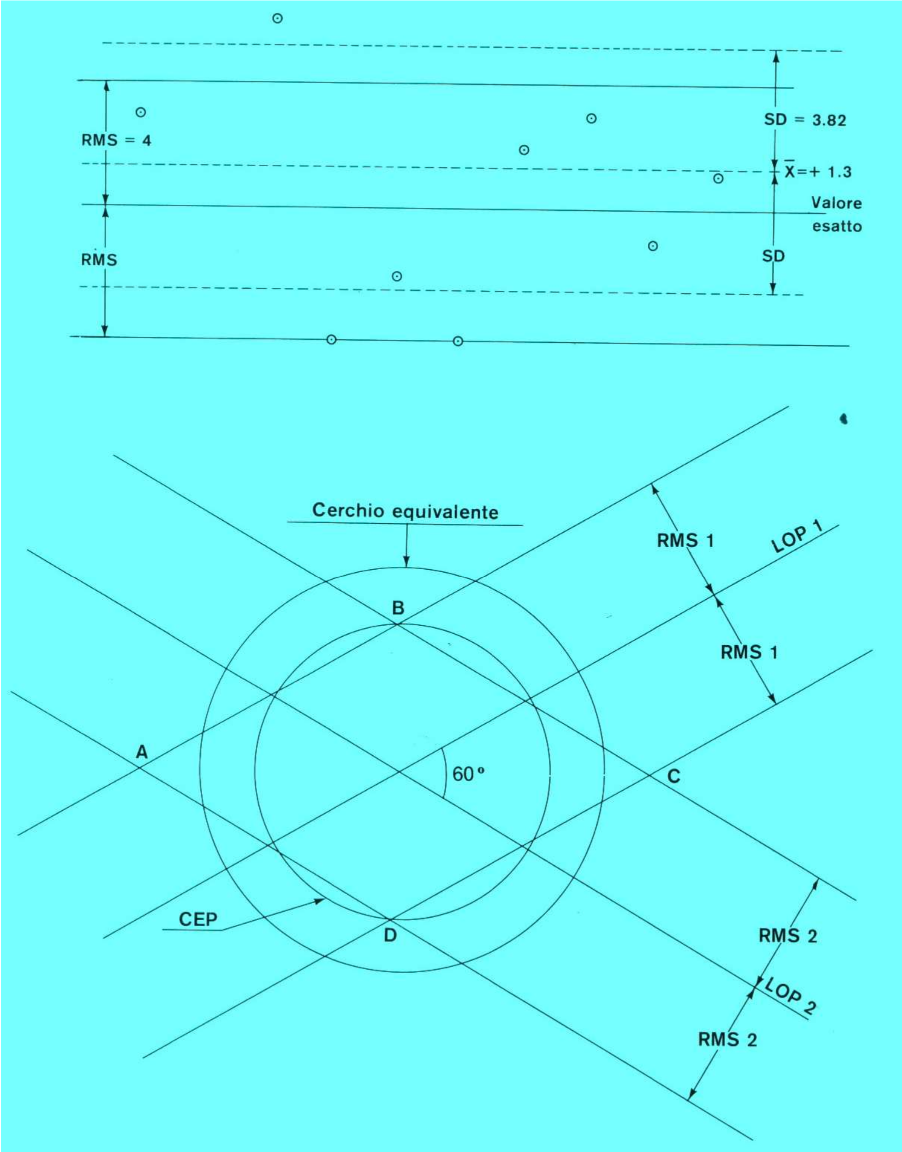
$$\sigma = \sqrt{\frac{2.89+44.89+22.09+28.09+10.89+28.09+0.49+2.89+5.29+0.49}{10}} = \sqrt{\frac{146.1}{10}} = \sqrt{14.61} = 3.82$$

- *Errore probabile =* $\pm\dfrac{2}{3}\,\sigma = \pm\dfrac{2}{3}\,3.82 = \pm 2.55$ *(corrisponde al 50 % degli errori).*

- *Cerchio Equivalente.* - Supponendo che le misurazioni (LOP) siano due, caso minimo, che abbiano il medesimo *RMS* (o σ) e che l'angolo α fra i due LOP sia di 60°, il raggio del *Cerchio Equivalente r* nel cui interno sono comprese il *68,27 %* delle posizioni determinate:

$$r = \frac{\sqrt{3.82^2+3.82^2}}{sen60°} = \frac{\sqrt{14.59+14.59}}{0.866} = \frac{\sqrt{29.18}}{0.866} = \frac{5.40}{0.866} = 6.24$$

Significa che l'area del cerchio di raggio *r = 6,24* ha la probabilità di comprendere il *68 %* (circa) delle posizioni determinate; detta area si chiama anche *area di incertezza del 68 % .*



ABCD: area di incertezza del 68,27 % (± σ)

- *Errore circolare probabile (Circular Errore Probable): CEP =* $1{,}2 \cdot \sigma$

$$CEP = 1{,}2 \cdot 3{,}82 = 4{,}58$$

Significa che l'area del cerchio di raggio *r = 4,58* ha la probabilità di comprendere il *50 %* delle posizioni determinate.

INDICE

PARTE PRIMA

SCIENZE DELLA NAVIGAZIONE E TECNOLOGIE NAVALI 1 – I A